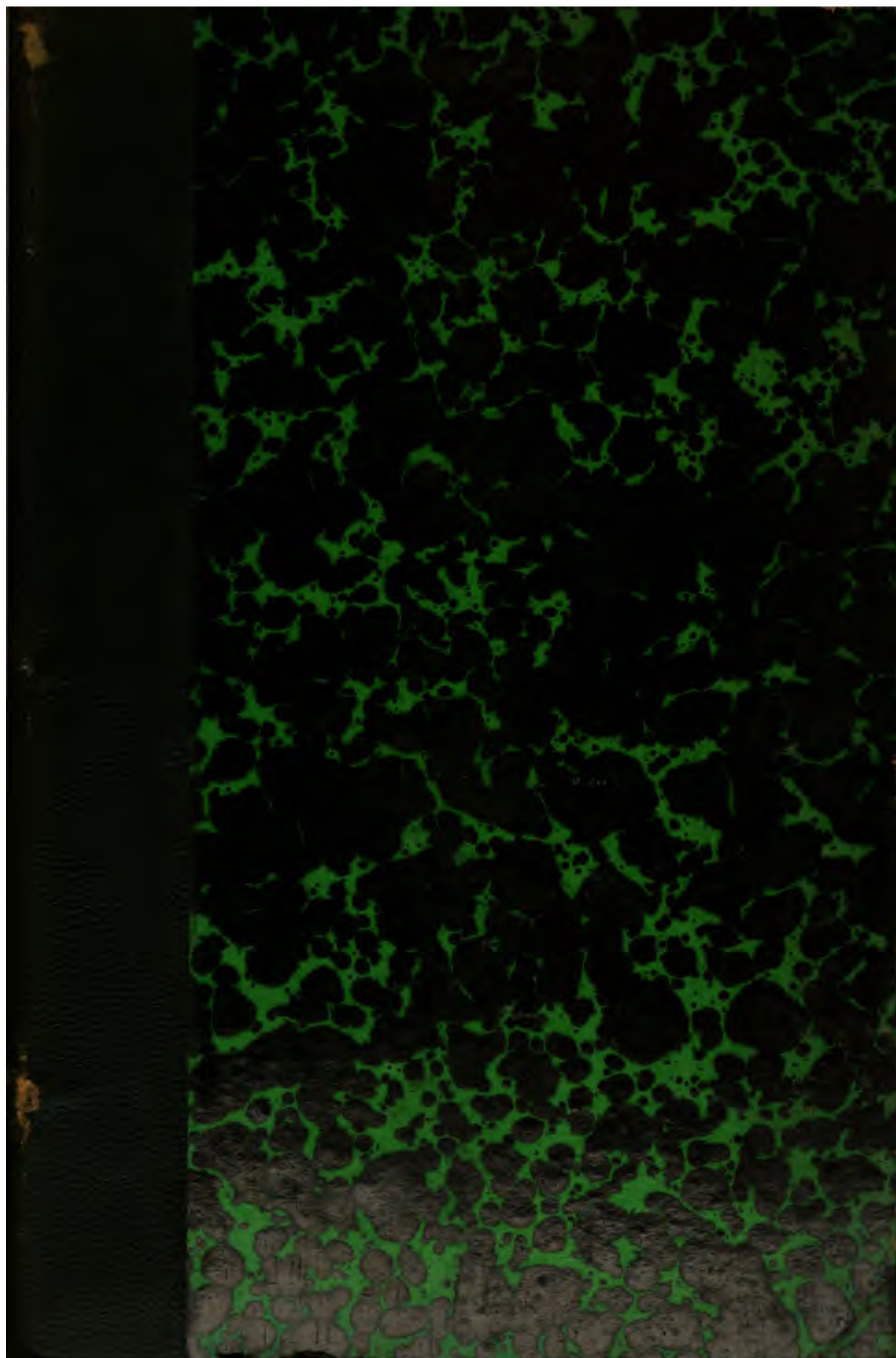




PARIS. — SOC. D'IMP. PAUL DUPONT (CL.). 140.11.90.

# LEÇONS

DE

# GÉOMÉTRIE

# ANALYTIQUE

A L'USAGE DES ÉLÈVES

DE LA CLASSE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

ET DES CANDIDATS

A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE ET A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

PAR

**E. PRUVOST**

Inspecteur général de l'Instruction publique

Ancien Professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand

TOME PREMIER




PARIS

SOCIÉTÉ D'IMPRIMERIE & LIBRAIRIE ADMINISTRATIVES & CLASSIQUES

**PAUL DUPONT, Éditeur**

4, RUE DU BOULOI, 4

1891

# LEÇONS

DE

# GÉOMÉTRIE

# ANALYTIQUE

connues. Mais, dans la plupart des cas, les inconnues sont représentées par des longueurs non mesurées, et l'on se propose de déduire de la formule qui exprime l'inconnue ou même des équations du problème non résolues, une construction graphique donnant l'inconnue elle-même et non plus sa valeur numérique.

Les méthodes à suivre pour mettre un problème en équation et pour résoudre ces équations sont exposées dans les cours d'Algèbre; nous nous occuperons donc seulement de la construction des formules, et nous commencerons par établir un théorème important, connu sous le nom de *principe de l'homogénéité*.

## DE L'HOMOGÉNÉITÉ.

**1. Définition.** — On dit qu'une fonction $f(a, b, c, \ldots)$ est homogène par rapport aux quantités $a, b, c, \ldots$, lorsque, en y remplaçant $a, b, c, \ldots$ par $ta, tb, tc, \ldots$, on a identiquement

$$f(ta, tb, tc, \ldots) = t^m f(a, b, c, \ldots);$$

l'exposant $m$ est le degré de la fonction homogène.

Par exemple, les fonctions

$$a^2 - 2ab, \quad \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}\cos\frac{b}{a}}{a-b} \quad \frac{a^2 + b\sqrt{a^2+b^2}}{a^2 - b^2}, \quad \frac{a^2 - b^2}{a^4 + b^4}$$

sont homogènes et ont respectivement pour degrés les nombres 2, $\frac{1}{2}$, 0 et $-2$.

**2. Théorème fondamental.** — *Lorsqu'en prenant une unité* ARBITRAIRE *on a trouvé entre les diverses longueurs qui composent une figure une relation*

$$f(a, b, c, \ldots) = 0,$$

*si cette équation est exacte, elle devra être satisfaite quel que soit* $t$, *quand on y remplace* $a, b, c, \ldots$ *par* $ta, tb, tc, \ldots$.

Désignons par A, B, C, ... les lignes qui composent la figure considérée.

Choisissons arbitrairement une première unité de longueur $u$, c'est-à-dire une unité n'ayant aucune relation avec les lignes A, B, C, ...; et soient $a, b, c, \ldots$ les nombres qui mesurent alors les lignes A, B, C, ....

Choisissons ensuite une seconde unité de longueur également

arbitraire $u'$, et soient $a'$, $b'$, $c'$, ... les nombres qui mesurent alors les lignes A, B, C, ....

Adoptons d'abord l'unité $u$, et supposons que, par une certaine série de raisonnements, on ait trouvé entre les nombres $a$, $b$, $c$, ... la relation

(1) $$f(a, b, c, \ldots) = 0;$$

comme les raisonnements que l'on a faits sont indépendants de l'unité adoptée, si on les répète en prenant $u'$ pour unité, on trouvera, entre les nombres $a'$, $b'$, $c'$, ..., la relation

(2) $$f(a', b', c', \ldots) = 0,$$

qui ne diffère de l'équation (1) que par le changement des lettres $a$, $b$, $c$, ... en $a'$, $b'$, $c'$, ....

Maintenant, quand on change d'unité, le rapport des nombres qui mesurent une même grandeur est égal à l'inverse du rapport des deux unités; si donc on désigne par $t$ le rapport de l'unité $u$ à l'unité $u'$, on aura les relations

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \ldots = t;$$

on en tire

$$a' = ta, \quad b' = tb, \quad c' = tc, \ldots;$$

en portant les valeurs de $a'$, $b'$, $c'$, ... dans l'équation (2), elle devient

(3) $$f(ta, tb, tc, \ldots) = 0.$$

Laissons fixe l'unité $u$, et faisons varier arbitrairement l'unité $u'$; les nombres $a$, $b$, $c$, ... ne changeront pas, mais le rapport $t$ de l'unité $u$ à l'unité $u'$ prendra telle valeur que l'on voudra; donc l'équation (3) devra avoir lieu quel que soit $t$.

Le théorème précédent pourrait servir à vérifier l'exactitude des calculs que l'on a effectués; mais, dans la pratique, il est avantageux de le remplacer par un autre que l'on désigne sous le nom de *théorème de l'homogénéité*.

**3. Théorème de l'homogénéité.** — *Lorsqu'en prenant une unité arbitraire on a trouvé entre les diverses longueurs qui composent une figure la relation*

(1) $$f(a, b, c, \ldots) = 0,$$

*il faut, pour que cette équation* PUISSE ÊTRE EXACTE, *qu'elle soit*

*homogène ou composée d'une somme de termes homogènes qui sont nuls séparément.*

Pour démontrer ce théorème, nous supposerons que la fonction $f$ est algébrique et mise sous forme entière.

En premier lieu, si la fonction $f$ est homogène, on aura identiquement

$$f(ta, tb, tc, \ldots) = t^m f(a, b, c, \ldots);$$

donc l'équation

$$f(ta, tb, tc, \ldots) = 0$$

aura lieu quel que soit $t$ ; et, d'après le théorème fondamental, l'équation (1) *pourra être exacte*.

En second lieu, si la fonction $f$ n'est pas homogène, nous pourrons grouper ensemble les termes de même degré et l'équation (1) prendre la forme suivante :

$$(4) \quad \varphi_m(a, b, c, \ldots) + \varphi_p(a, b, c, \ldots) + \ldots + \varphi_s(a, b, c, \ldots) = 0.$$

Dans l'équation (4), remplaçons $a, b, c, \ldots$ par $ta, tb, tc, \ldots$; elle devient

$$(5) \quad t^m\varphi_m(a,b,c,\ldots) + t^p\varphi_p(a, b, c, \ldots) + \ldots + t^s\varphi_s(a,b,c,\ldots) = 0.$$

D'après le théorème fondamental, l'équation (5) doit avoir lieu quel que soit $t$ ; on doit donc avoir séparément

$$\varphi_m(a, b, c, \ldots) = 0 \quad \varphi_p(a, b, c, \ldots) = 0 \quad \varphi_s(a, b, c, \ldots) = 0.$$

Le théorème de l'homogénéité se trouve ainsi établi pour le cas où la fonction $f(a, b, c, \ldots)$ est algébrique et mise sous forme entière.

**Remarque.** — Si l'on avait pris pour unité une ligne ayant un rapport déterminé avec une des lignes de la figure, on ne pourrait plus appliquer le théorème de l'homogénéité.

Soit en effet A la ligne de la figure qui a un rapport déterminé avec l'unité; le nombre qui mesure A ne sera plus représenté par une lettre $a$, mais par un symbole numérique tel que 2, 5, $\frac{2}{3}, \ldots$ ; il ne restera donc plus dans la fonction $f$ aucune trace de l'exposant de la puissance à laquelle était élevée la quantité $a$.

Cette remarque fait comprendre combien il est important, en appliquant l'Algèbre à la résolution d'un problème de géométrie, de laisser l'unité de longueur complètement arbitraire.

**4. Rétablissement de l'homogénéité.** — Lorsqu'on prend pour unité de longueur une ligne ayant un rapport déterminé avec une des lignes de la figure, les équations obtenues, bien qu'exactes, cessent d'être homogènes ; mais il est facile de rétablir l'homogénéité.

Soient $b'$, $c'$, $d'$,... les nombres qui mesurent les lignes B, C, D,..., l'unité de longueur étant A, et

(6) $$f(b', c', d', \ldots) = 0$$

une des équations obtenues.

Appelons $a$, $b$, $c$,... les nombres qui mesurent les lignes A, B, C, ..., l'unité étant arbitraire, on aura

$$\frac{1}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = \frac{d'}{d} = \ldots ;$$

d'où

$$b' = \frac{b}{a} \quad c' = \frac{c}{a} \quad d' = \frac{d}{a} \ldots,$$

et l'équation (6) devient

(7) $$f\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}, \ldots\right) = 0 ;$$

cette nouvelle équation (7) est homogène et du degré zéro.

**Règle.** — *Pour rétablir l'homogénéité, il suffit de remplacer dans l'équation*

$$f(b', c', d', \ldots) = 0$$

*les nombres $b'$, $c'$, $d'$,... par les rapports $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{d}{a}$, ... des nombres qui mesurent les lignes* B, C, D, ... *au nombre qui mesure la ligne* A *quand l'unité de longueur est* ARBITRAIRE.

Par exemple, si l'on prend pour unité l'hypoténuse d'un triangle rectangle, le théorème de Pythagore donne entre les nombres $b'$, $c'$ qui mesurent les côtés de l'angle droit la relation non homogène

$$b'^2 + c'^2 = 1,$$

de laquelle on déduit, en rétablissant l'homogénéité, l'équation

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1, \quad \text{ou} \quad b^2 + c^2 = a^2.$$

**Remarque I.** — En se reportant à la mesure des angles et à la définition des lignes trigonométriques, on voit que les angles et les lignes trigonométriques sont exprimés par de véritables nombres ; il résulte de là qu'en appliquant le théorème de l'homogénéité, on devra faire abstraction des lettres qui représentent soit des angles, soit des lignes trigonométriques.

**Remarque II.** — Dans un problème, on considère souvent simultanément des nombres qui expriment des mesures de longueur, de surface et de volume. Dans ce cas, on suppose ordinairement que l'unité de surface est le carré construit sur l'unité de longueur, et que l'unité de volume est le cube construit sur la même unité de longueur. Il résulte de là que pour appliquer le théorème de l'homogénéité, on devra remplacer les lettres S et V qui représentent une surface ou un volume par $a^2$ ou $b^3$, $a$ et $b$ étant les côtés du carré et du cube équivalents à la surface S et au volume V.

### CONSTRUCTION DES FORMULES.

**5.** Dans ce qui suit, nous supposerons que l'inconnue $x$ représente une longueur et que son expression est homogène ; cette expression devra dès lors être du premier degré.

Si l'inconnue était une surface ou un volume, on la représenterait par $x^2$ ou par $x^3$, la lettre $x$ désignant une longueur.

**6. Construction des expressions rationnelles.** — Quand l'expression est entière, elle est de la forme

$$x = a + b - c + d \dots,$$

et elle peut être construite sans difficulté.

L'expression fractionnaire la plus simple est

$$x = \frac{ab}{c};$$

l'inconnue $x$ est une quatrième proportionnelle aux trois longueurs $a$, $b$, $c$; on a appris à la construire en géométrie élémentaire.

Soit maintenant à construire l'expression

$$x = \frac{abcd}{a'b'c'}.$$

Posons

$$\frac{cd}{c'} = \alpha \qquad \frac{b\alpha}{b'} = \beta;$$

il en résultera

$$x = \frac{a\beta}{a'};$$

on obtiendra $\alpha$, $\beta$, puis $x$ par une série de quatrièmes proportionnelles.

Soit enfin à construire l'expression

$$x = \frac{A - B + C}{A' + B' - C'},$$

dans laquelle A, B, C sont des monômes du degré $m + 1$, et A', B', C' des monômes du degré $m$.

Soit $\lambda$ une longueur quelconque ; posons

$$\begin{array}{lll} A = \lambda^m a & B = \lambda^m b & C = \lambda^m c \\ A' = \lambda^{m-1} a' & B' = \lambda^{m-1} b' & C' = \lambda^{m-1} c' ; \end{array}$$

nous obtiendrons les longueurs $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$ en construisant une série de quatrièmes proportionnelles. L'expression de $x$ devient

$$x = \lambda \frac{a - b + c}{a' + b' - c'} = \frac{\lambda\alpha}{\beta},$$

en posant

$$\alpha = a - b + c \qquad \beta = a' + b' - c'.$$

Pour obtenir $x$, il restera à construire une quatrième proportionnelle aux trois longueurs $\lambda$, $\alpha$, $\beta$.

**Remarque.** — Si l'inconnue $x$ était exprimée par un polynôme, on construirait par la méthode précédente chaque terme du polynôme, et l'on serait ramené à construire une expression de la forme

$$x = a + b - c + d,$$

dans laquelle $a$, $b$, $c$, $d$ désignent des longueurs.

**7. Construction des irrationnelles du second degré.** — Rappelons d'abord que l'on a appris en géométrie élémentaire à construire la longueur $x$ définie par l'une des deux équations suivantes :

$$x^2 = ab \qquad \frac{x^2}{a^2} = \frac{b}{c}.$$

On obtient la longueur définie par la première équation en cons-

truisant une moyenne proportionnelle entre les longueurs $a$ et $b$; on obtient la longueur définie par la seconde équation en construisant un carré qui soit à un carré donné dans un rapport donné.

Cela posé, soit d'abord à construire l'expression

$$x = \sqrt{\frac{abcdf}{a'b'c'}},$$

la quantité placée sous le radical étant une fraction dans laquelle le degré du numérateur surpasse de deux unités celui du dénominateur.

Posons

$$\frac{df}{c'} = \alpha, \quad \frac{c\alpha}{b'} = \beta \quad \frac{b\beta}{a'} = \gamma;$$

il en résultera

$$x = \sqrt{a\gamma};$$

on obtiendra $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par une série de quatrièmes proportionnelles; enfin on obtiendra $x$ en construisant une moyenne proportionnelle entre les deux longueurs $a$ et $\gamma$.

Soit maintenant à construire l'expression

$$x = \sqrt{\frac{A - B + C}{A' + B' - C'}},$$

dans laquelle A, B, C sont des monômes du degré $m + 2$ et A', B', C' des monômes du degré $m$.

Soit $\lambda$ une longueur quelconque; posons

$$\begin{array}{lll} A = \lambda^{m+1} a & B = \lambda^{m+1} b & C = \lambda^{m+1} c \\ A' = \lambda^{m-1} a' & B' = \lambda^{m-1} b' & C' = \lambda^{m-1} c'; \end{array}$$

nous obtiendrons les longueurs $a, b, c, a', b', c'$ en construisant une série de quatrièmes proportionnelles. L'expression de $x$ devient

$$x = \sqrt{\lambda^2 \frac{a - b + c}{a' + b' - c'}} = \sqrt{\lambda^2 \frac{\alpha}{\beta}},$$

en posant

$$\alpha = a - b + c, \quad \beta = a' + b' - c'.$$

Pour obtenir $x$, il restera à construire un carré qui soit à un carré donné dans un rapport donné.

**Remarque.** — On parvient souvent, par des procédés particuliers, à construire les formules plus simplement que par la méthode générale que nous venons d'exposer.

Par exemple, les formules

$$x = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad x = \sqrt{a^2 - b^2}$$

se construisent directement au moyen du théorème de Pythagore.

De même la formule

$$x = \sqrt{a^2 - b^2 + c^2 + d^2 - f^2}$$

pourra être construite en appliquant plusieurs fois le théorème de Pythagore.

**8. Construction des radicaux dont l'indice est une puissance de 2.** — Soit à construire l'expression

$$(1) \qquad x = \sqrt[2^m]{\frac{A - B + C}{A' + B' - C'}},$$

dans laquelle A, B, C sont des monômes du degré $2^m + p + 1$, et A', B', C' des monômes du degré $p + 1$.

La méthode consiste à mettre l'expression de $x$ sous la forme

$$(2) \qquad x = \sqrt[2^m]{\lambda^{2^m} \frac{\alpha}{\beta}},$$

$\lambda$, $\alpha$, $\beta$ représentant des longueurs.

Pour cela, $\lambda$ étant une longueur quelconque, posons

$$A = \lambda^{2^m + p} a \quad B = \lambda^{2^m + p} b \quad C = \lambda^{2^m + p} c$$
$$A' = \lambda^p a' \quad B' = \lambda^p b' \quad C' = \lambda^p c',$$

nous obtiendrons les longueurs $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$, en construisant une série de quatrièmes proportionnelles. L'expression de $x$ devient

$$x = \sqrt[2^m]{\lambda^{2^m} \frac{a - b + c}{a' + b' - c'}} = \sqrt[2^m]{\lambda^{2^m} \frac{\alpha}{\beta}},$$

en posant

$$\alpha = a - b + c, \quad \beta = a' + b' - c'.$$

Nous sommes ainsi ramenés à construire la longueur $x$ définie par l'équation

$$x = \sqrt[2^m]{\lambda^{2^m} \frac{\alpha}{\beta}}.$$

Écrivons cette expression de la manière suivante :

$$x = \sqrt[2^m]{\lambda^{2^m-2}\left(\lambda^2\frac{\alpha}{\beta}\right)}.$$

Posons maintenant

$$x_1^2 = \lambda^2\frac{\alpha}{\beta}.$$

Nous obtiendrons $x_1$ en construisant un carré qui soit à un carré donné dans un rapport donné. L'expression de $x$ deviendra

$$x = \sqrt[2^m]{\lambda^{2^m-2}x_1^2} = \sqrt[2^{m-1}]{\lambda^{2^{m-1}-1}x_1}.$$

Écrivons cette nouvelle expression de $x$ de la manière suivante :

$$x = \sqrt[2^{m-1}]{\lambda^{2^{m-1}-2}(\lambda x_1)},$$

et posons $\lambda x_1 = x_2^2$, nous aurons

$$x = \sqrt[2^{m-1}]{\lambda^{2^{m-1}-2}x_2^2} = \sqrt[2^{m-2}]{\lambda^{2^{m-2}-1}x_2}.$$

Nous obtiendrons $x_2$ en construisant une moyenne proportionnelle entre les longueurs $\lambda$ et $x_1$.

En continuant de la même manière, nous obtiendrons pour $x$ une expression de la forme

$$x = \sqrt[2^{m-p}]{\lambda^{2^{m-p}-1}x_p},$$

qui, pour $p = m - 1$, devient

$$x = \sqrt{\lambda x_{m-1}},$$

et nous obtiendrons $x$ en construisant une moyenne proportionnelle entre les longueurs $\lambda$ et $x_{m-1}$.

En résumé, on obtiendra la longueur $x$ définie par l'équation (1) en construisant : 1° une série de quatrièmes proportionnelles ; 2° un carré qui soit à un carré donné dans un rapport donné ; 3° une série de moyennes proportionnelles.

**Exemples.** — 1° Soit à construire l'expression

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^8+b^8}{a^4+b^4}}.$$

D'après la méthode exposée précédemment, il faut la mettre sous la forme

$$x = \sqrt[4]{\lambda^4 \frac{\alpha}{\beta}}.$$

Pour cela, on devrait poser

$$a^8 = \lambda^7 u \qquad b^8 = \lambda^7 v \qquad a^4 = \lambda^3 u' \qquad b^4 = \lambda^3 v'\,;$$

mais, dans ce cas particulier, on peut opérer un peu plus simplement.

Dans la fraction placée sous le radical, mettons en facteur $a^6$ au numérateur et $a^2$ au dénominateur, nous aurons

$$x = \sqrt[4]{\frac{a^6\left(a^2 + \frac{b^8}{a^6}\right)}{a^2\left(a^2 + \frac{b^4}{a^2}\right)}} = \sqrt[4]{a^4 \frac{a^2 + u^2}{a^2 + v^2}},$$

en posant $u = \frac{b^4}{a^3}$, $v = \frac{b^2}{a}$. Les longueurs $u$ et $v$ sont faciles à construire; d'un autre côté, le théorème de Pythagore fera connaître les longueurs $\alpha$ et $\beta$ définies par les équations

$$\alpha^2 = a^2 + u^2 \qquad \beta^2 = a^2 + v^2,$$

l'expression de $x$ devient alors

$$x = \sqrt[4]{a^4 \frac{\alpha^2}{\beta^2}} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{a^2 \frac{\alpha}{\beta}};$$

on obtiendra $x$ en construisant un carré qui soit à un carré donné dans un rapport donné.

2° Construire l'expression

$$x = \sqrt[8]{\frac{2}{3}}.$$

Sachant que l'unité est une longueur donnée AB,

A———————B

nous pouvons écrire successivement l'expression de $x$ sous les formes suivantes :

$$x = \sqrt[8]{1^8 . \frac{2}{3}} = \sqrt[8]{\overline{AB}^8 . \frac{2}{3}} = \sqrt[8]{\overline{AB}^6 \left(\overline{AB}^2 . \frac{2}{3}\right)},$$

en posant $\overline{AB}^2 . \frac{2}{3} = \alpha^2$, nous aurons

$$x = \sqrt[8]{\overline{AB}^4 . \alpha^2} = \sqrt[4]{\overline{AB}^3 . \alpha} = \sqrt[4]{\overline{AB}^2 . (AB . \alpha)};$$

posons maintenant $AB . \alpha = \beta^2$, nous aurons

$$x = \sqrt[4]{\overline{AB}^2 . \beta^2} = \sqrt{AB . \beta},$$

et l'on est ramené à construire une moyenne proportionnelle entre deux longueurs connues AB et $\beta$.

**Remarque.** — Il résulte de ce qui précède que toute expression algébrique rationnelle ou irrationnelle représentant une longueur pourra toujours être construite à l'aide de la règle et du compas, quand les indices des radicaux qu'elle renferme, si elle est irrationnelle, sont des puissances exactes de 2.

On démontre que les expressions satisfaisant aux conditions précédentes sont seules susceptibles d'être construites à l'aide de la règle et du compas ; la démonstration de ce théorème ne peut trouver place dans un ouvrage élémentaire.

**9. Construction des racines de l'équation du second degré.** — L'équation du second degré rendue homogène peut présenter l'une des formes suivantes :

(1) $$x^2 + bx + c^2 = 0;$$
(2) $$x^2 - bx + c^2 = 0;$$
(3) $$x^2 + bx - c^2 = 0;$$
(4) $$x^2 - bx - c^2 = 0;$$

il suffit de considérer les formes (2) et (4), car en y remplaçant $x$ par $-x$, on obtient les formes (1) et (3).

Soit d'abord l'équation

$$x^2 - bx + c^2 = 0.$$

Si les racines sont réelles, elles sont positives, et, en les désignant par $x'$ et $x''$, nous aurons

$$x' + x'' = b, \quad x'x'' = c^2.$$

On est donc ramené à construire un rectangle connaissant sa surface et son périmètre.

Pour cela, décrivons une demi-circonférence ayant pour dia-

mètre $AA' = b$; au point A, menons une tangente sur laquelle nous prendrons une longueur $AT = c$; enfin menons par le point T une parallèle au diamètre AA', elle rencontre la circonférence aux points M et M'. On a

$$TM = x' \qquad TM' = x'';$$

Fig. 1.

car les propriétés de la circonférence donnent

$$TM . TM' = \overline{AT}^2 = c^2,$$

et l'on a, en outre,

$$TM + TM' = b.$$

Soit maintenant l'équation

$$x^2 - bx - c^2 = 0.$$

Ses racines sont l'une positive, l'autre négative; en les désignant par $x'$ et $-x''$, nous aurons

$$x' - x'' = b, \qquad x'x'' = c^2.$$

On est donc ramené à construire un rectangle connaissant la surface et la différence des côtés.

Pour cela, décrivons une circonférence ayant $AA' = b$ pour diamètre; au point A menons une tangente sur laquelle nous prendrons $AT = c$; le diamètre TO rencontre la circonférence aux points M et M'. On a

$$TM = x'' \qquad TM' = x';$$

car les propriétés de la circonférence donnent

$$TM.TM' = \overline{AT}^2 = c^2,$$

et l'on a en outre

$$TM' - TM = b.$$

Fig. 2.

**10. Construction des racines de l'équation bicarrée.** — L'équation bicarrée rendue homogène peut présenter l'une des formes suivantes:

$$x^4 + abx^2 - c^2d^2 = 0,$$
$$x^4 - abx^2 + c^2d^2 = 0,$$
$$x^4 - abx^2 - c^2d^2 = 0;$$

il est inutile de considérer l'équation $x^4 + abx^2 + c^2d^2 = 0$ qui n'a que des racines imaginaires.

Si l'on pose

$$x^2 = cy,$$

nos équations deviendront

$$y^2 + \frac{ab}{c}y - d^2 = 0, \quad y^2 - \frac{ab}{o}y + d^2 = 0, \quad y^2 - \frac{ab}{c}y - d^2 = 0.$$

On construira les racines de l'une de ces équations du second degré, et l'on obtiendra ensuite $x$ par une moyenne proportionnelle entre $c$ et $y$.

Pour que les valeurs de $x$ soient réelles, il faut et il suffit que les valeurs de $y$ soient réelles et positives.

### PROBLÈME DE PAPPUS.

**11.** Nous ne donnerons qu'un seul exemple d'un problème de géométrie résolu par l'Algèbre, et nous choisirons la question suivante connue sous le nom de problème de Pappus.

**Problème.** — *Par le point* A *donné à égale distance de deux droites rectangulaires $xx'$, $yy'$, mener une sécante telle que la partie interceptée par les deux droites rectangulaires soit égale à une longueur donnée $l$.*

Il est aisé de montrer que le problème peut avoir quatre solutions, parmi lesquelles deux sont toujours réelles.

Joignons le point A au point O et faisons tourner la droite indéfinie AO autour du point A dans le sens indiqué par la flèche; la portion interceptée dans l'angle $y'ox$ croîtra d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini, ce qui arrivera quand la droite sera parallèle à $yy'$; donc, pour une position de cette droite, la partie interceptée dans l'angle $xoy'$ aura pour longueur $l$. On verrait de même qu'il y a une solution dans l'angle $x'oy$.

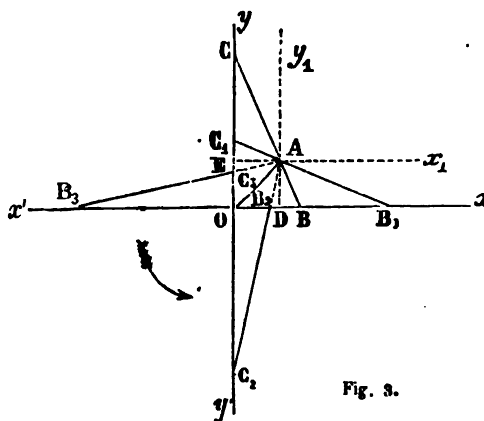


Fig. 3.

Examinons maintenant ce qui se passe dans l'angle $yox$. Quand la sécante occupe la position $Ay_1$ parallèle à $oy$, la portion interceptée dans l'angle $yox$ est infinie : la sécante tournant dans le sens de la flèche, la portion interceptée diminue et redevient infinie quand la sécante occupe la position $Ax_1$ parallèle à $ox$. Il résulte de là que la portion de la sécante interceptée dans l'angle $yox$ est susceptible d'un minimum $m$; donc, si l'on a $l > m$, le problème aura deux solutions dans l'angle $yox$; si l'on a $l = m$, ces deux solutions se réduisent à une; enfin si l'on a $l < m$, il n'y aura plus de solution dans l'angle $yox$. — Il est d'ailleurs évident qu'il n'y a pas de solution dans l'angle $y'ox'$.

Le problème pouvant avoir quatre solutions, sa résolution dépendra d'une équation du quatrième degré; nous montrerons que, par des transformations bien connues, on peut arriver à n'avoir à résoudre que des équations du second degré; nous établirons en outre les relations qui existent entre ces transformations analytiques et les inconnues particulières dont le choix a permis à Pappus, Newton et Gergonne de résoudre par la règle et le compas le problème considéré.

**Première solution.** — Appelons $a$ les distances AD = AE du point A aux deux côtés de l'angle $yox$, et soit BC une des positions de la sécante cherchée; nous prendrons pour inconnue la distance BD = $x$. Les triangles semblables ABD, BCO donnent

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{OB} \quad \text{ou} \quad \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} = \frac{l}{a + x};$$

cette équation rendue rationnelle et ordonnée par rapport à $x$ devient

$$(1) \qquad x^4 + 2ax^3 + (2a^2 - l^2)x^2 + 2a^3x + a^4 = 0.$$

Figurons les quatre sécantes BC, $B_1C_1$, $B_2C_2$, $B_3C_3$ qui remplissent la condition du problème; en raisonnant sur chacune d'elles comme sur la sécante BC, on retrouve toujours l'équation (1); donc les quatre racines $x, x_1, x_2, x_3$ de cette équation seront les segments DB, $DB_1$, $DB_2$, $DB_3$, dont les deux derniers sont, comme on le voit, négatifs.

Maintenant les droites BC, $B_1C_1$ sont évidemment symétriquement placées par rapport à OA, et il en est de même des droites $B_2C_2$, $B_3C_3$; on a donc

$$DB_1 = EC, \quad DB_3 = EC_2.$$

Les triangles semblables ADB, AEC, d'une part, et les triangles semblables $ADB_2$, $AEC_2$, d'autre part, nous donnent

$$\frac{DB}{AD}=\frac{AE}{EC}\qquad\frac{DB_2}{AD}=\frac{AE}{EC_2},$$

c'est-à-dire

$$xx_1=a^2,\qquad x_2x_3=a^2.$$

Ces relations nous montrent que l'équation (1) peut être résolue à la manière des équations réciproques.

Pour abaisser le degré de l'équation (1), on peut poser

$$y=x+\frac{a^2}{x};$$

d'où

$$y^2=x^2+\frac{a^4}{x^2}+2a^2;$$

en divisant par $x^2$ les deux membres de l'équation (1) et en rapprochant les termes équidistants des extrêmes, elle devient

$$\left(x^2+\frac{a^4}{x^2}\right)+2a\left(x+\frac{a^2}{x}\right)+2a^2-l^2=0;$$

en tenant compte des expressions de $y$ et de $y^2$, on obtient enfin l'équation du second degré

(2) $$y^2+2ay-l^2=0.$$

$y$ étant connu, on obtiendra $x$ en résolvant l'équation du second degré

(3) $$x^2-xy+a^2=0.$$

**Construction.** — De l'équation (2) on tire

$$y=-a\pm\sqrt{a^2+l^2};$$

pour construire ces deux valeurs de l'inconnue $y$ que nous désignerons par $y'$ et $y''$, nous prolongeons AD d'une longueur $DF=l$; puis du point O comme centre avec OF comme rayon, nous décrivons une circonférence qui rencontre $xx'$ aux points $F_1$ et $F_2$; on aura

$$DF_1=-a+\sqrt{a^2+l^2}=\quad y'$$
$$DF_2=\quad a+\sqrt{a^2+l^2}=-y'';$$

traçons enfin deux circonférences ayant respectivement pour diamètre $DF_1$ et $DF_2$, et projetons orthogonalement en B, $B_1$, $B_2$, $B_3$

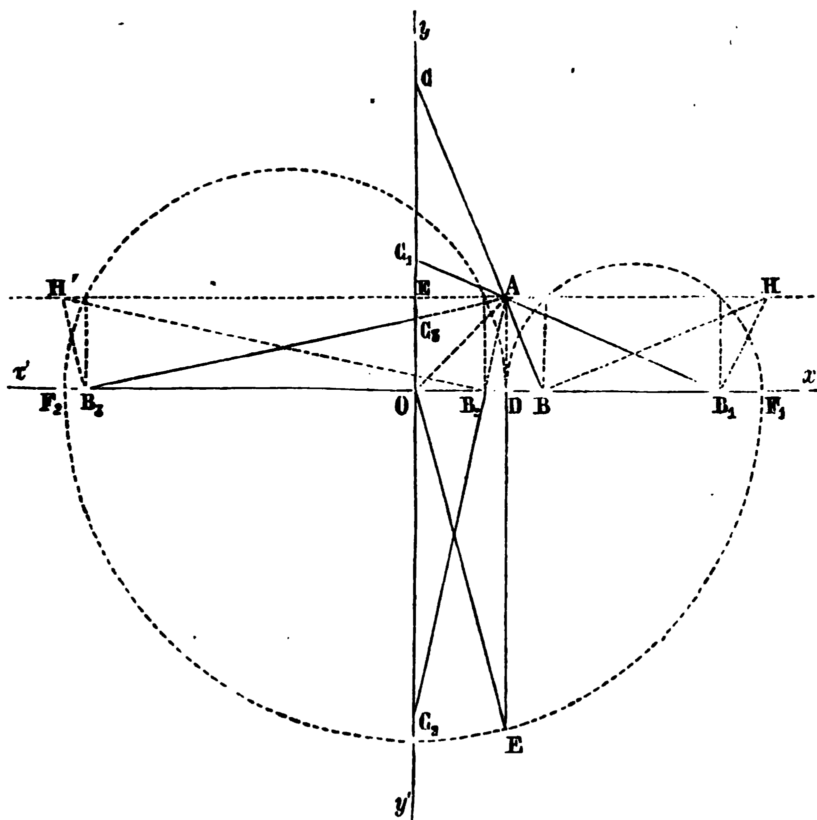


Fig. 4.

sur $x'x$ les points où elles rencontrent la droite indéfinie AE ; les quatre sécantes qui répondent à la question sont AB, $AB_1$, $AB_2$, $AB_3$.

Comme on a évidemment

$$AD = a < \frac{DF_2}{2},$$

les points $B_2$, $B_3$ existeront toujours ; mais pour que les points B et $B_1$ existent, il faut et il suffit que l'on ait

$$a < \frac{-a + \sqrt{a^2 + l^2}}{2},$$

ou bien

$$l > 2a\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad > 2\text{OA}.$$

Donc le problème aura quatre solutions si l'on a $l > 2\text{OA}$ ; il en aura trois si l'on a $l = 2\text{OA}$ ; enfin il en aura deux si l'on a $l < 2\text{OA}$.

**Solution de Pappus.** — Au point B élevons sur AB une perpendiculaire qui rencontre AE au point H ; Pappus prenait le point H pour inconnue. Ce point étant déterminé, l'intersection avec la droite $x'x$ de la circonférence décrite sur AH comme diamètre fait connaître les points B, $B_1$ qui correspondent à la même racine de l'équation (2).

Il est aisé, en effet, de montrer que le segment AH n'est autre chose que l'inconnue auxiliaire $y$ employée précédemment, car les triangles semblables ABH, ABD donnent la relation

$$\frac{\text{AH}}{\text{AB}} = \frac{\text{AB}}{\text{DB}}; \quad \text{d'où} \quad \text{AH} = \frac{\overline{\text{AB}}^2}{\text{DB}} = x + \frac{a^2}{x} = y.$$

**Solution de Gergonne.** — En observant que les quatre sécantes sont deux à deux également distantes du point O, Gergonne a été conduit à prendre pour inconnue la distance $r$ du point O à la sécante cherchée. L'inconnue $r$ ne doit évidemment dépendre que d'une équation du second degré.

La distance $r$ a une relation très simple avec l'inconnue auxiliaire $y$. En effet, en exprimant de deux manières différentes la surface du triangle COB, on a la relation

$$rl = (\text{OD} + \text{DB})(\text{OE} + \text{EC}) = (a + x)\left(a + \frac{a^2}{x}\right);$$

on en tire

$$(4) \qquad r = \frac{2a^2}{l} + \frac{a}{l}\left(x + \frac{a^2}{x}\right) = \frac{2a^2}{l} + \frac{a}{l}y.$$

En éliminant $y$ entre les équations (2) et (4), on obtient l'équation suivante qui fait connaître l'inconnue $r$

$$(5) \qquad r^2 - 2\frac{a^2}{l}r - a^2 = 0.$$

**Construction.** — L'équation (5) a ses racines réelles et de signes contraires ; on vérifie facilement que la racine négative prise en valeur absolue représente les distances du point O aux deux sécantes $B_2C_2$, $B_3C_3$.

Pour construire les valeurs absolues des racines de l'équation (5), prolongeons AD d'une longueur DF $= l$, et par le point O, menons sur OF une perpendiculaire qui rencontre AD au point G; le triangle rectangle OGF nous donne

$$\mathrm{DG} = \frac{\overline{\mathrm{OD}}^2}{\mathrm{DF}} = \frac{a^2}{l}.$$

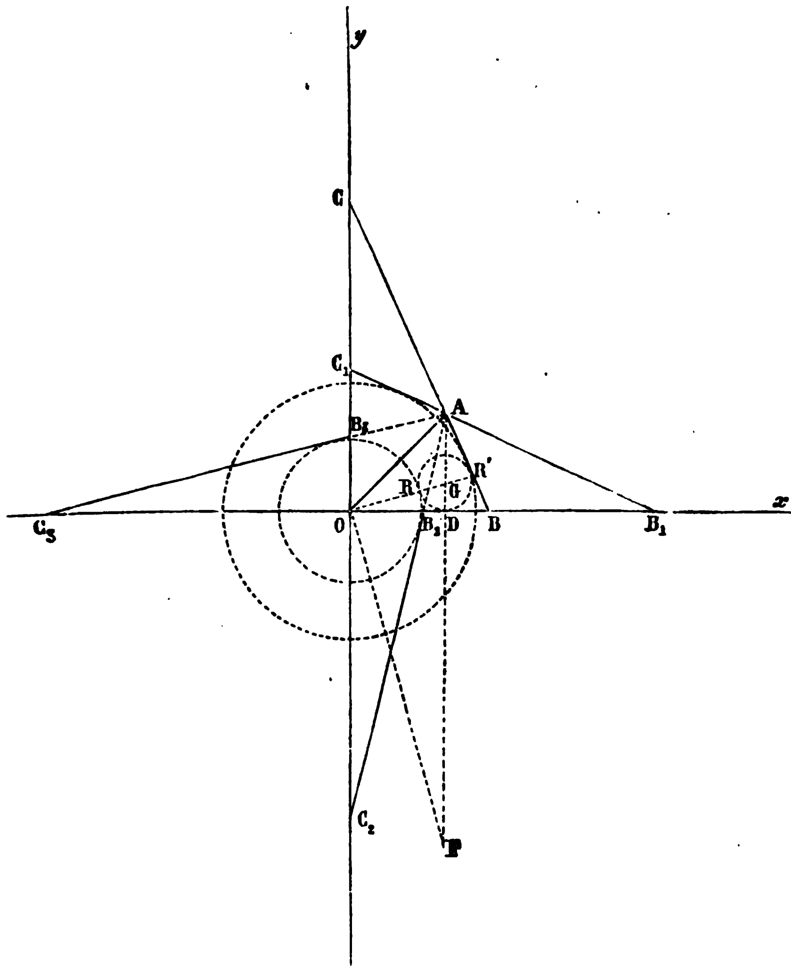



Fig. 5.

Le cercle décrit du point G comme centre avec GD comme rayon

rencontre le diamètre OG aux points R et R'; les segments OR, OR' représentent en valeur absolue les racines de l'équation (5). On obtiendra les sécantes cherchées en menant du point A des tangentes aux circonférences décrites du point O comme centre avec OR et OR' comme rayon.

Le point A est nécessairement en dehors de la circonférence de rayon OR; car on a

$$OR < OG < OA.$$

Le problème aura donc toujours au moins deux solutions; pour qu'il en ait quatre, il faut et il suffit que le point A soit en dehors de la circonférence de rayon OR', ou bien que $OA = a\sqrt{2}$ surpasse la racine positive de l'équation (5), ou enfin qu'on obtienne un résultat positif en remplaçant dans l'équation (5) l'inconnue $r$ par $a\sqrt{2}$; on retrouve ainsi la condition

$$l > 2a\sqrt{2}$$

déjà obtenue.

**Autre solution.** — Soit CB une des sécantes cherchées; circonscrivons une circonférence au triangle OCB, elle rencontre la droite OA au point L; si l'on peut déterminer le point L, on aura les points B et C en faisant passer par O et L une circonférence ayant pour rayon $\frac{l}{2}$. On obtient ainsi deux circonférences symétriques l'une de l'autre par rapport à OA; l'une donne la sécante BC, l'autre la sécante $B_1C_1$.

Désignons par $z$ le segment AL; on a la relation

$$OA.AL = AB.AC,$$

c'est-à-dire

$$az\sqrt{2} = \sqrt{a^2+x^2}\sqrt{a^2+\frac{a^4}{x^2}} = \frac{a}{x}(a^2+x^2);$$

donc

$$z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x+\frac{a^2}{x}\right) = \frac{y}{\sqrt{2}};$$

la nouvelle inconnue $z$ a donc encore une relation très simple avec l'inconnue auxiliaire $y$ déjà employée pour résoudre l'équation (1).

Dans ce qui précède, nous nous sommes occupés des sécantes CB, $C_1$ $B_1$ situées dans l'angle $yox$; considérons maintenant les sécantes $B_2$ $C_2$, $B_3$ $C_3$ situées l'une dans l'angle $y'ox$, l'autre dans

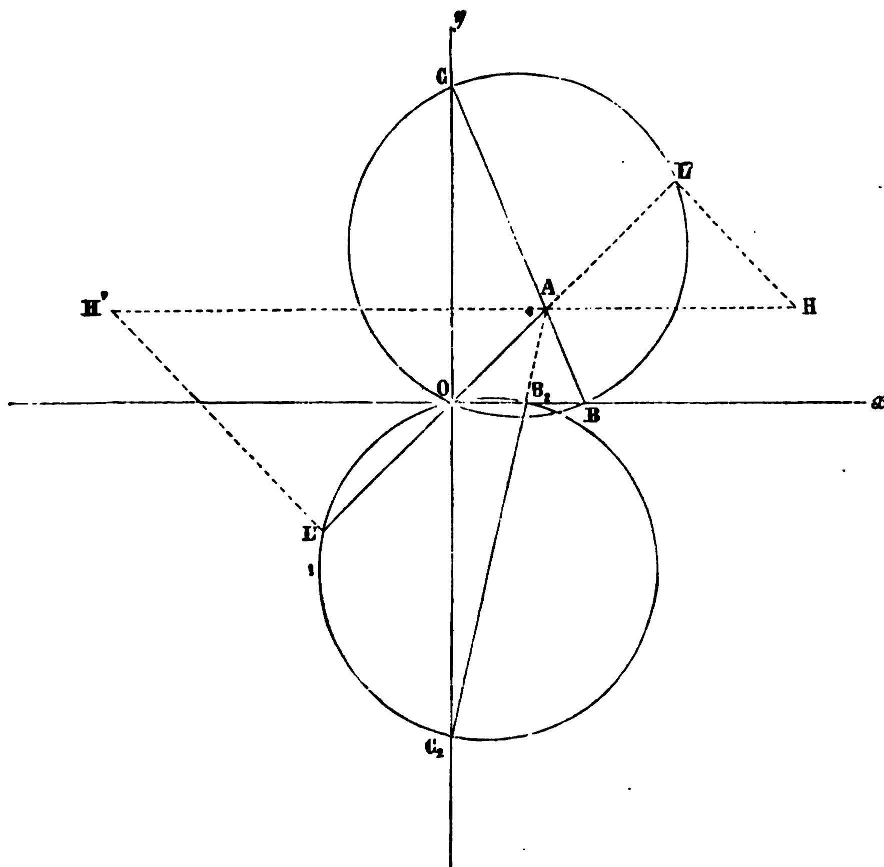



Fig. 6.

l'angle $yox'$; soit L′ le point où la circonférence circonscrite au triangle $OB_2C_2$, par exemple, rencontre la droite OA; désignons par $z'$ le segment AL′, par $y''$ la racine négative de l'équation (2), on verra sans difficulté que l'on a

$$z' = \frac{y''}{\sqrt{2}};$$

Il est aisé d'en conclure que $OL' = AL$. En effet, on a

$$OL' = AL' - AO = -\frac{y''}{\sqrt{2}} - \frac{2a}{\sqrt{2}}.$$

D'un autre côté, on tire de l'équation (2)

$$y' + y'' = -2a;$$

par conséquent

$$OL' = \frac{y'}{\sqrt{2}} = z = AL.$$

Quand le point L sera connu, on obtiendra donc facilement le point L'.

**Remarque.** — Les points L et L' peuvent être obtenus immédiatement quand on connaît les points H et H' qui ont été déterminés dans la solution de Pappus.

En effet, puisque l'on a en valeur absolue

$$AH = y' \qquad AH' = -y'',$$

et

$$AL = \frac{y'}{\sqrt{2}} \qquad AL' = \frac{-y''}{\sqrt{2}};$$

puisqu'en outre les angles LAH, L'AH' valent 45°, il en résulte que les points L et L' sont respectivement les projections des points H et H' sur la droite OA.

**Solution de Newton.** — Newton a remarqué que le point A est équidistant des milieux des sécantes BC, $B_1C_1$ ainsi que des milieux des sécantes $B_2C_2$, $B_3C_3$.

De cette remarque il résulte qu'en prenant pour inconnue la distance $t$ du point A au milieu de la sécante BC, cette inconnue ne pourra avoir que deux valeurs différentes, de sorte que l'équation qui la donne aura ses quatre racines égales deux à deux ou égales et de signes contraires, et qu'en conséquence elle sera certainement réductible au second degré.

Nous allons montrer que prendre pour inconnue la distance $t$ du point A au milieu $\omega$ de la sécante BC revient à résoudre l'équation (1) à l'aide d'une transformation souvent appliquée aux équations réciproques.

Cette transformation consiste à poser

$$(6) \qquad t=\lambda\frac{x-a}{x+a};$$

lorsque, dans la relation (6), on remplace $x$ par la racine $x_1=\frac{a^2}{x}$ de l'équation (1), on obtient pour $t$ une valeur

$$t_1=\lambda\frac{\frac{a^2}{x}-a}{\frac{a^2}{x}+a}=\lambda\frac{a-x}{a+x}=-t;$$

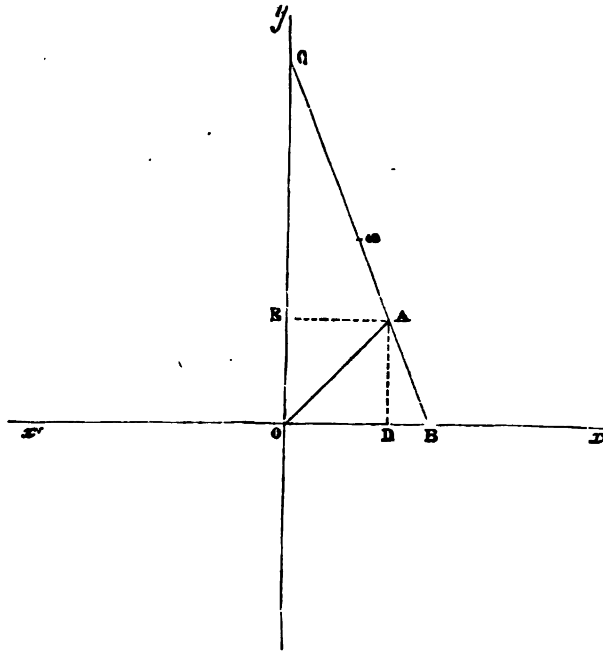



Fig. 7.

l'équation qui donne $t$ aura donc ses racines égales deux à deux et de signes contraires.

Or, on a

$$CA=A\omega+\omega C=\frac{l}{2}+t,\quad BA=B\omega-A\omega=\frac{l}{2}-t,$$

et les triangles semblables ABD, ACE donnent

$$\frac{\frac{l}{2}-t}{x}=\frac{\frac{l}{2}+t}{a};$$

d'où

$$(7) \qquad t=-\frac{l}{2}\,\frac{x-a}{x+a}.$$

Pour retrouver la transformation définie par la relation (6), il suffit de remplacer la constante $\lambda$ par $-\frac{l}{2}$

**Remarque.** — Quand on a construit la première inconnue auxiliaire $y$, il est facile de construire l'inconnue $t$; en effet, de la relation (7) on tire

$$x=a\,\frac{\frac{l}{2}-t}{\frac{l}{2}+t}.$$

En substituant cette valeur de $x$ dans l'égalité

$$x+\frac{a^2}{x}=y,$$

on obtient l'équation

$$t^2=\frac{l^2}{4}\,\frac{y-2a}{y+2a}.$$

On obtiendra donc $t$ en construisant un carré qui soit au carré ayant pour côté $\frac{l}{2}$ dans le rapport de $y-2a$ à $y+2a$.

Pour que la valeur de $t$ soit réelle, il faut que le rapport $\frac{y-2a}{y+2a}$ soit positif; cela est vrai quand on remplace $y$ par la racine négative $y''$ de l'équation (2); mais, pour qu'à la racine positive $y'$ corresponde une valeur réelle de $t$, il faut et il suffit que l'on ait

$$y'>2a;$$

on retrouve ainsi la relation de condition déjà obtenue $l>2\text{OA}$.

# APPLICATION
# DE L'ALGÈBRE
## A L'ÉTUDE
# DES PROPRIÉTÉS DES FIGURES

---

Nous allons maintenant nous occuper de l'application de l'Algèbre à l'étude des propriétés des figures.

L'exposé des méthodes qui permettent de faire cette étude constitue à proprement parler la géométrie analytique telle qu'on l'envisage aujourd'hui. On la divise en deux parties distinctes:

1° Géométrie analytique à deux dimensions, dans laquelle on étudie les figures situées dans un même plan.

2° Géométrie analytique à trois dimensions, dans laquelle on étudie les figures situées d'une manière quelconque dans l'espace.

---

# GÉOMÉTRIE PLANE

---

## LIVRE PREMIER

---

## CHAPITRE PREMIER

### DES COORDONNÉES.

12. La première question que Descartes eut à résoudre pour pouvoir appliquer l'Algèbre à l'étude des propriétés des figures fut de déterminer par des nombres la position d'un point sur un plan.

En général, on fixe la position d'un point sur un plan à l'aide de deux courbes ; les nombres qui déterminent les deux courbes sont appelés les coordonnées du point.

Il y a une infinité de systèmes de coordonnées ; nous ne définirons que les plus simples et les plus fréquemment employés.

### COORDONNÉES RECTILIGNES OU CARTÉSIENNES.

Traçons dans le plan deux droites $x'x$, $y'y$ se coupant en un point $o$, et par un point quelconque M du plan menons des parallèles aux deux droites $x'x$, $y'y$ ; nous formerons de cette façon un parallélogramme $o$AMB.

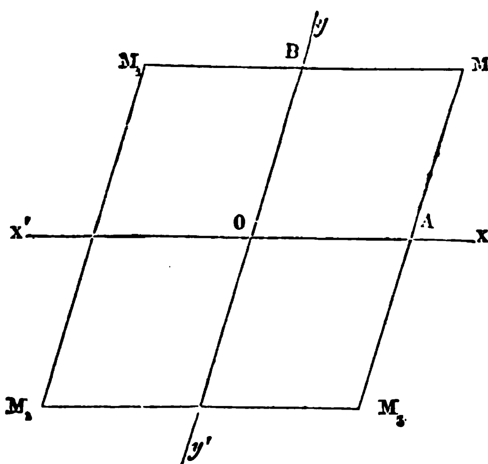


Fig. 8.

Le point M sera connu :

1° Si l'on donne les longueurs $o$A, $o$B des côtés de ce parallélogramme.

2° Si l'on indique le sens dans lequel ces longueurs doivent être portées à partir du point $o$ sur les droites $x'x$, $y'y$.

Pour fixer ce sens, on convient d'affecter la longueur $o$A du signe $+$, par exemple, si elle doit être portée sur $ox$, et du signe $-$ si elle doit être portée sur $ox'$.

De même, on convient d'affecter la longueur $o$B du signe $+$ si elle doit être portée sur $oy$, et du signe $-$ si elle doit être portée sur $oy'$.

La longueur $o$A, affectée d'un signe convenable, est appelée *l'abscisse* du point M ; nous la désignerons généralement par la lettre $x$.

La longueur $o$B, affectée d'un signe convenable, est appelée *l'ordonnée* du point M ; nous la désignerons généralement par la lettre $y$.

Les deux quantités $x$ et $y$ sont dites les *coordonnées rectilignes* du point M.

Les deux droites fixes $x'x$, $y'y$ sont les axes de coordonnées; $x'x$ est l'axe des $x$ ou des abscisses, $y'y$ est l'axe des $y$ ou des ordonnées; enfin le point $o$, intersection des deux axes de coordonnées est appelé l'origine des coordonnées.

Figurons quatre points M, $M_1$, $M_2$, $M_3$ situés respectivement dans l'un des quatre angles formés par les axes des coordonnées; on voit facilement que :

Pour le point M, les deux coordonnées sont positives ;

Pour le point $M_1$, l'abscisse est négative et l'ordonnée positive ;

Pour le point $M_2$, l'abscisse est négative et l'ordonnée négative ;

Pour le point $M_3$, l'abscisse est positive et l'ordonnée négative.

On voit aussi facilement que tous les points de l'axe des $x$ ont une ordonnée nulle, et que tous les points de l'axe des $y$ ont une abscisse nulle.

Ajoutons enfin que les deux coordonnées de l'origine sont nulles.

**Remarque.** — Nous désignerons par $\theta$ l'angle moindre que 180° formé par les demi-axes des coordonnées positives ; quand l'angle $\theta$ est droit, on dit que les coordonnées sont rectangulaires, quand l'angle $\theta$ n'est pas droit, on dit que les coordonnées sont obliques.

**COORDONNÉES POLAIRES.**

**13.** Soient O un point fixe appelé pôle, OX une demi-droite fixe appelée axe polaire ; la position d'un point M du plan sera connue si l'on donne la distance OM et l'angle MOX que fait OM avec OX.

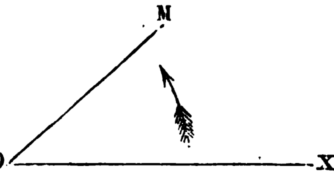


Fig. 9.

Nous désignerons par $\rho$ la distance OM qui est appelée le rayon vecteur du point M, et par $\omega$ l'angle MOX qui est appelé l'angle polaire du point M.

On obtient évidemment tous les points du plan en faisant varier $\rho$ de $o$ à $+\infty$, et $\omega$ de $o$ à $2\pi$. Nous verrons plus tard qu'il y a avantage à faire varier $\rho$ et $\omega$ depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, en adoptant les conventions suivantes :

1° Quand l'angle $\omega$ sera positif, on le décrira en tournant à

partir de OX dans le sens de la flèche; quand cet angle sera négatif, on le décrira en tournant en sens contraire à partir de OX.

2° Quand le rayon vecteur sera positif, on le portera sur la direction définie par l'angle $\omega$; quand ce rayon vecteur sera négatif, on le portera sur le prolongement de la direction définie par l'angle $\omega$.

### COORDONNÉES BI-POLAIRES.

**14.** Soient F et F' deux points fixes; la position d'un point M pourra être définie en donnant les distances $u$ et $v$ du point M aux deux points fixes.

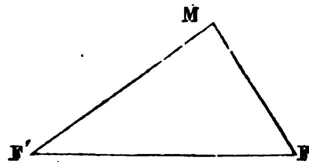


Fig. 10.

Dans ce système, le point M est déterminé par l'intersection de deux circonférences décrites des points F et F' comme centres avec $u$ et $v$ pour rayon.

Ces deux circonférences se coupent généralement en deux points M et M'.

### COORDONNÉES CURVILIGNES QUELCONQUES.

**15.** Soient A une courbe qui est connue quand on donne un paramètre $a$; B une courbe également connue quand on donne un paramètre $b$. Donnons au paramètre $a$ des valeurs $a_1, a_2, a_3, \ldots$, et au paramètre $b$ des valeurs correspondantes $b_1$, $b_2$, $b_3, \ldots$; nous obtiendrons des couples de courbes $(A_1,B_1), (A_2,B_2), (A_3,B_3)$; les courbes de chaque couple, en se coupant, détermineront des points $M_1$, $M_2$, $M_3 \ldots$.

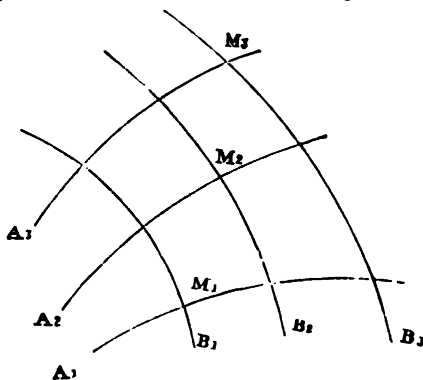


Fig. 11.

L'ensemble des deux courbes (A B) constitue un système de coordonnées, et les deux paramètres variables $a$, $b$ sont appelés les coordonnées curvilignes du point M.

Dans le système des coordonnées cartésiennes, les courbes A et B sont des droites, les unes parallèles à l'axe $ox$, les autres parallèles à l'axe $oy$.

Dans le système des coordonnées polaires, les courbes A sont des demi-droites passant par le pôle O, et les courbes B des cercles ayant pour centre le point O.

Dans le système des coordonnées bi-polaires, les courbes A et B sont des cercles ayant pour centre les uns le point F, les autres le point F'.

## REPRÉSENTATION DES LIGNES PLANES.

**16. Théorème.** — *Une ligne plane est représentée par une équation entre les coordonnées d'un quelconque de ses points.*

Soit C une courbe plane quelconque; traçons dans son plan deux axes de coordonnées $ox$, $oy$; prenons sur $ox$ une abscisse quelconque $oA = x$, et menons par le point A une parallèle à $oy$: cette parallèle rencontrera la courbe C en un ou plusieurs points tels que M. Il résulte de là que, quand on connait l'abscisse $x$ d'un point M de la courbe C, son ordonnée $y$ est déterminée; en d'autres termes, cette ordonnée $y$ est une fonction de l'abscisse $x$ considérée comme variable indépendante.

Quand la courbe C sera définie par une propriété géométrique convenant à chacun de ses points, la forme de la relation qui lie les coordonnées d'un point de la courbe ne changera pas, le point se déplaçant sur la courbe. Il existera donc entre les coordonnées d'un point quelconque de la courbe C une relation

$$f(x,y) = 0,$$

de forme invariable. Cette relation est appelée *l'équation* de la courbe C.

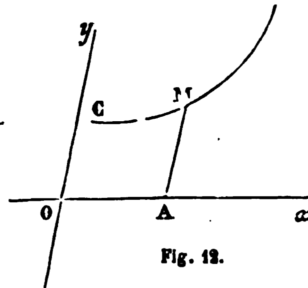


Fig. 12.

Ainsi l'équation d'une courbe est la relation de *forme constante* qui lie les coordonnées de l'un quelconque de ses points.

Réciproquement, toute équation

$$(1) \qquad f(x,y) = 0$$

entre les coordonnées $x$ et $y$ représente *en général* une courbe.

Lorsqu'on se donne l'abscisse $x$, l'équation (1) donne pour $y$ différentes valeurs que nous définirons par les équations

(2) $$y=\varphi_1(x) \quad y=\varphi_2(x) \quad y=\varphi_3(x) \quad \ldots.$$

Considérons en particulier l'équation

$$y=\varphi_1(x),$$

et donnons à l'abscisse $x$ les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$; il en résultera pour l'ordonnée $y$ des valeurs correspondantes $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$. Les points $A_1, A_2, A_3, \ldots$ ayant respectivement pour coordonnées $(\alpha_1,\beta_1)$, $(\alpha_2,\beta_2)$, $(\alpha_3,\beta_3)$, ..., formeront une ligne polygonale. Mais si l'abscisse $x$ varie d'une manière continue, l'ordonnée $y$ variera *en général* d'une manière continue et les côtés de la ligne polygonale deviendront moindres que toute quantité donnée : cette ligne polygonale sera donc remplacée par une courbe $C_1$.

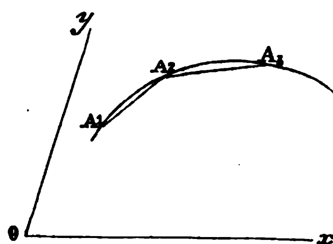


Fig. 13.

A chacune des équations (2) correspondra une courbe; l'ensemble des courbes $C_1, C_2, C_3, \ldots$ formera une courbe C qui est dite représentée par l'équation (1).

**Remarques.** — 1° Il peut arriver que l'équation (1) ne représente que des points isolés.

Par exemple, l'équation

$$[\varphi(x,y)]^2+[\psi(x,y)]^2=0$$

ne peut être satisfaite que si l'on pose à la fois

$$\varphi(x,y)=0 \qquad \psi(x,y)=0;$$

elle représente donc les points d'intersection des courbes ayant pour équations

$$\varphi(x,y)=0 \qquad \psi(x,y)=0.$$

2° Il peut arriver que l'équation (1) ne représente pas une courbe réelle. Cela a lieu, par exemple, pour l'équation

$$[\varphi(x,y)]^2+[\psi(x,y)]^2+a^2=0,$$

dans laquelle $a$ est une constante réelle.

**Remarque.** — Tout ce qui vient d'être dit des coordonnées rectilignes s'applique aux coordonnées curvilignes quelconques.

Soient $a$, $b$ les coordonnées curvilignes d'un point M ; toute courbe sera représentée par une équation de la forme

$$f(a, b) = 0,$$

et, réciproquement, toute équation de cette forme représentera une courbe.

---

# CHAPITRE II

## TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

**17.** Soit

$$f(x,y)=0$$

l'équation d'une courbe rapportée à deux axes $ox$, $oy$; il est souvent avantageux de rapporter cette courbe à d'autres axes $o'x'$, $o'y'$, pour lesquels, quand ils sont convenablement choisis, l'équation de la courbe peut prendre une forme plus simple.

Le problème sera résolu si l'on sait exprimer les coordonnées anciennes $x$, $y$ d'un point quelconque M du plan en fonction des coordonnées nouvelles $x'$, $y'$ du même point.

Pour établir les formules de la transformation des coordonnées, nous démontrerons d'abord un théorème important, connu sous le nom de *théorème des projections*.

### THÉORÈME DES PROJECTIONS.

**18. Définition.** — Quand le segment de droite compris entre deux points $a$, $b$ sera représenté par $ab$, nous dirons que le point $a$ est son *origine*. S'il est représenté par $ba$, le point $b$ sera regardé comme étant son origine.

*Signe des segments situés sur une même droite.* — Considérons sur une même droite plusieurs segments; pour indiquer leur direction, nous regarderons comme *positifs* tous ceux qui seront dirigés dans un même sens, $x'x$ par exemple, à partir de leur ori-




Fig. 14.

gine, et comme négatifs tous ceux qui seront dirigés en sens contraire.

D'après cela, le segment $ab$ sera positif et le segment $ba$ négatif.

On aura donc

$$ab + ba = 0.$$

**Lemme.** — *Étant pris trois points quelconques a, b, c sur une même droite, la somme des trois segments consécutifs ab, bc, ca est toujours nulle.*

Il s'agit d'établir la relation

(1) $$ab + bc + ca = 0.$$

Les trois points, quant à leur ordre respectif, ne donnent lieu en réalité qu'aux trois cas différents indiqués sur les figures 1, 2 et 3 (*fig.* 15.)

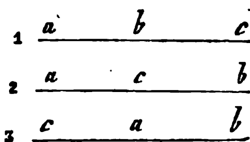


Fig. 15.

Dans le cas de la figure 1, on a, en ne considérant que les valeurs absolues des segments,

$$ab + bc = ac,$$

mais $ac = -ca$; donc

$$ab + bc + ca = 0.$$

Dans le cas de la figure 2, on a

$$ac + cb = ab;$$

mais

$$ac = -ca \qquad cb = -bc;$$

donc encore

$$ab + bc + ca = 0.$$

Dans le cas de la figure 3, on a

$$ca + ab = cb;$$

mais

$$cb = -bc;$$

donc on a toujours

$$ab + bc + ca = 0.$$

**Généralisation.** — Quel que soit l'ordre respectif des $n$ points $a, b, c, \ldots, f, g, h$ situés sur une même droite, on a toujours la relation

(2) $$ab + bc + cd + \ldots + gh + ha = 0.$$

Nous allons prouver que si la proposition est vraie pour $n-1$ points, elle sera vraie pour $n$ points.

Supposons, en effet, que l'on ait pour $n - 1$ points $a, b, c, \ldots, g$ la relation

$$ab + bc + cd + \ldots + fg + ga = 0.$$

D'après le lemme précédent, on a entre les trois points $a$, $g$, $h$ la relation

$$ag + gh + ha = 0.$$

Ajoutons membre à membre les deux égalités précédentes en observant que $ag + ga = 0$ ; on a

$$ab + bc + \ldots + gh + ha = 0.$$

La proposition, ayant été vérifiée pour trois points, sera donc vraie pour quatre, puis pour cinq, etc. ; elle est donc générale.

**19. Définition.** — Considérons un axe fixe $x'x$, un plan P non parallèle à l'axe et un segment de droite AB : la droite AB et l'axe $x'x$ ne sont pas nécessairement situés dans un même plan.

Par les points A, B menons des plans parallèles au plan P, ils couperont l'axe $x'x$ en des points $a$, $b$. On dit que les points $a, b$ sont les projections des points A, B sur l'axe $x'x$, parallèlement au plan P : le segment $ab$ est dit la projection du segment AB.

Quand le plan P est perpendiculaire à l'axe de projection $x'x$, on dit que la projection est orthogonale ; dans le cas contraire, on dit que la projection est oblique.

**Signe de la projection.** — Pour les applications, il est avantageux de donner un signe aux projections ; on détermine ce signe de la manière suivante :

Imaginons qu'un mobile parcourt le segment AB en allant de A vers B, par exemple, la projection de ce mobile sur l'axe ira du point $a$ au point $b$. Si le segment $ab$ est parcouru dans le sens $x'x$, par exemple, on considérera la projection de AB comme positive. Si ce segment $ab$ est parcouru en sens contraire, la projection sera considérée comme négative.

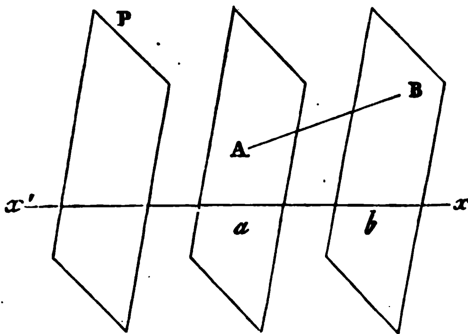


Fig. 16.

La projection change évidemment de signe quand le segment, au lieu d'être parcouru de A vers B, est parcouru de B vers A.

Nous indiquerons le sens dans lequel est parcouru un segment par l'ordre des lettres en plaçant la première, la lettre qui correspond au point de départ du mobile. D'après cela, on a

$$\text{proj. AB} = -\text{ proj. BA.}$$

**20. Théorème fondamental des projections.** — *La somme algébrique des projections des côtés d'une ligne polygonale fermée, plane ou gauche sur un axe quelconque, est égale à zéro.*

Nous supposons ici qu'un mobile parti du point A parcourt les côtés du polygone dans le sens de la flèche.

Soient ABC... FG les sommets du polygone et *a b c... fg* leurs projections sur l'axe. On a la relation

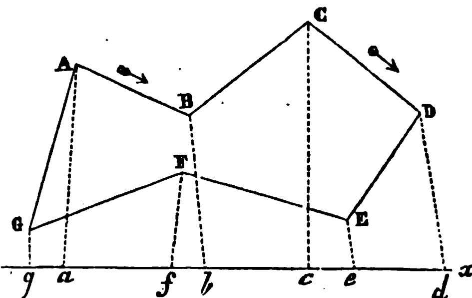


Fig. 17.

$$(3) \qquad ab + bc + \ldots + fg + ga = 0;$$

or *ab, bc,...* représentent en grandeur et en signe les projections des côtés du polygone sur l'axe $x'x$; le théorème fondamental des projections est donc démontré.

**Définition.** — Soit une ligne polygonale non fermée ABC... FG parcourue dans le sens de la flèche par un mobile parti du point A; la ligne AG qui joint le point de départ A au point d'arrivée G est appelée la résultante de la ligne polygonale, et les côtés AB, BC, CD,... en sont les composantes.

De la relation (3) on tire

$$ab + bc + \ldots + fg = ag,$$

ce qui démontre le théorème suivant :

**Théorème.** — *La somme algébrique des projections des composantes d'une ligne polygonale est égale à la projection de la résultante.*

**Corollaire.** — *Si deux lignes polygonales de forme quelconque*

***sont terminées aux mêmes extrémités* A, G, *leurs projections sur un axe quelconque sont égales.***

En effet, la somme des projections des côtés de chaque ligne polygonale est égale à la projection de la résultante commune AG.

**21.** Nous allons maintenant donner à l'énoncé du théorème des projections une forme algébrique dont nous ferons un fréquent usage.

**Segment directeur.** — Considérons un segment AB auquel nous mènerons par un point $o$ une parallèle $y'oy$. Nous supposons que, par convention, le segment AB soit regardé comme positif quand il a le sens $oy$ et comme négatif quand il a le sens $oy'$ prolongement de $oy$.

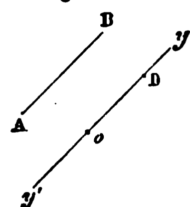


Fig. 18.

Prenons à partir du point $o$ sur la demi-droite $oy$ un point D tel que $o$D soit égal à l'*unité de longueur*, le segment $o$D est appelé le *segment directeur* du segment AB et le point D *son point directeur*.

**Théorème.** — *La projection sur un axe $x'x$ du segment* AB *susceptible d'un signe est égale à la valeur algébrique* U *de ce segment multipliée par la projection $u$ sur le même axe, du segment directeur correspondant.*

Soient $a, b, d$ les projections sur l'axe $x'x$ des points A,B,D parallèlement à un plan P non parallèle à cet axe, et C le point où la parallèle AC à l'axe $x'x$ rencontre le plan projetant le point B. Il s'agit d'établir la relation

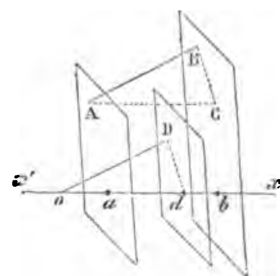


Fig. 19.

$$\text{(4)} \qquad \text{proj. AB} = \text{U}u.$$

Les triangles semblables ABC, $o$D$d$ donnent

$$\frac{ab}{od} = \frac{\text{AB}}{o\text{D}}; \quad \text{d'où} \quad ab = \text{AB}.od,$$

la relation (4) est donc vraie quand on y remplace les quantités proj. AB, U, $u$ par leurs valeurs *absolues*. Reste à montrer qu'elle

subsiste encore quand on remplace les mêmes quantités par leurs valeurs *algébriques*.

Pour le voir, il suffit de remarquer que si les segments AB, $o$D sont de *même sens*, proj. AB a le signe de $u$ et aussi celui de U$u$, puisque U est *positif*, et que, si les mêmes segments sont de sens contraires, proj. AB a un signe contraire à celui de $u$ et, par suite, le signe de U$u$, puisque U est *négatif*.

Ce théorème étant établi, considérons un polygone fermé ABC... GA parcouru par un mobile dans le sens ABC...; appelons $U_1, U_2, \ldots, U_n$ les valeurs *algébriques* de ses côtés et $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les projections sur un axe $x'x$ de leurs segments directeurs, le théorème fondamental des projections nous donnera la relation

$$(5) \qquad U_1 u_1 + U_2 u_2 + \ldots + U_n u_n = 0.$$

PLAN ORIENTÉ. — ANGLE DE DEUX DIRECTIONS.

**22. Définition.** — *Soient un plan* P *et une demi-droite tournant dans ce plan autour d'un point $o$; nous dirons, avec M. Darboux, que le plan* P *est orienté si l'on a choisi, dans ce plan, un sens pour les rotations positives et un sens pour les rotations négatives.*

Supposons, par exemple, que le plan P soit *horizontal*, et imaginons un observateur debout sur ce plan, les pieds au point $o$. Quand la demi-droite $o$D passe devant lui, elle va de sa droite vers sa gauche ou de sa gauche vers sa droite. Si nous *convenons* de regarder le premier sens de rotation comme celui des rotations *positives* et le deuxième comme celui des rotations *négatives*, le plan P sera orienté.

Soit encore un plan P rapporté à un système d'axes de coordonnées $ox$, $oy$; ce plan pourra être orienté.

Nous choisirons pour le sens des rotations positives celui dans lequel il faut faire tourner le demi-axe $ox$ des abscisses positives pour le faire coïncider avec le demi-axe $oy$ des ordonnées positives, en lui faisant décrire un angle *moindre* que $\pi$.

**23. Angle de deux directions.** — *Soient* $o$A, $o$B *deux demi-droites situées dans un plan orienté; on appelle angle de la demi-droite* $o$A *avec la demi-droite* $o$B *celui dont il faut faire tourner* $o$A *pour amener cette demi-droite à coïncider avec* $o$B.

*Cet angle est affecté du signe* + *ou du signe* —, *suivant que la*

*demi-droite $oA$ a tourné dans le sens positif ou dans le sens négatif.*

Nous représenterons par le symbole (A, B) l'angle de la demi-droite $oA$ avec la demi-droite $oB$. L'angle (A, B) admet une infinité de déterminations.

En effet, soit $\alpha$ l'angle *positif moindre que* $2\pi$ que forme la direction $oA$ avec la direction $oB$. Amenons $oA$ à coïncider une *première fois* avec $oB$, nous aurons

$$(A, B) = \alpha \quad \text{ou} \quad (A, B) = -2\pi + \alpha,$$

suivant que la demi-droite $oA$ aura tourné dans le sens positif ou dans le sens négatif. Maintenant, après cette première coïncidence de $oA$ avec $oB$, on peut en amener une infinité d'autres en continuant la rotation soit dans le sens positif soit dans le sens négatif. L'angle dont $oA$ tourne alors, à partir de $oB$, aura pour expression $2n\pi$, le nombre $n$ étant positif ou négatif; on a donc généralement

$$(A, B) = 2n\pi + \alpha.$$

**Remarque.** — Étant données deux directions $oA$, $oB$ dans un plan orienté, *toutes* les lignes trigonométriques de l'angle (A, B) sont déterminées.

En effet, la relation précédente montre que ces lignes sont égales à celles de l'angle $\alpha$.

**Théorème.** — *Étant données trois directions $oA$, $oB$, $oC$ dans un plan orienté, on a la relation*

$$(A, B) + (B, C) + (C, A) = 2n\pi,$$

*le nombre entier $n$ pouvant être positif, nul ou négatif.*

Soient en effet $a$, $b$, $c$ les points où les trois directions rencontrent la circonférence du cercle décrit du point $o$ comme centre avec un rayon égal à l'unité de longueur.

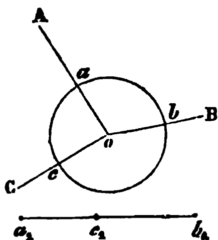


Fig. 20.

Prenons sur une droite, à partir du point $a_1$, dans un même sens, des longueurs $a_1b_1$, $a_1c_1$ égales aux arcs $ab$, $ac$ *moindres* que $2\pi$ et *comptés à partir du point a, dans le sens des rotations positives;* nous aurons la relation

$$a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1 = 0.$$

Maintenant on a

$$(A, B) = 2l\pi + a_1 b_1, \quad (B, C) = 2l'\pi + b_1 c_1 \quad (C, A) = 2l''\pi + c_1 a_1$$

et par suite

$$(A, B) + (B, C) + (C, A) = 2n\pi.$$

**24.** Considérons maintenant deux directions $oA$, $oB$ situées dans un plan P *non orienté,* leur angle sera celui que décrit l'une *quelconque* des demi-droites $oA$, $oB$, à partir de sa position primitive, pour venir coïncider avec l'autre.

Cet angle admet encore une infinité de déterminations, on les obtiendra toutes en orientant le plan P d'abord d'une façon puis de l'autre. En désignant par $\alpha$ l'une quelconque de ces déterminations, elles seront toutes comprises dans la formule

$$2n\pi \pm \alpha,$$

où $n$ désigne un nombre entier positif, nul ou négatif.

Si A et B sont deux points choisis à volonté sur les demi-droites $oA$, $oB$, on pourra prendre pour l'angle $\alpha$ qui entre dans l'expression précédente, l'angle opposé au côté AB dans le triangle $AoB$.

Quand le plan P n'est pas orienté, il n'y a pas lieu de distinguer l'angle que fait la direction $oA$ avec $oB$ de celui que fait la direction $oB$ avec $oA$.

**Remarque.** — Étant données deux directions $oA$, $oB$ dans un plan non orienté, le *cosinus* de leur angle est *complètement déterminé;* son *sinus*, sa *tangente* et sa *cotangente* sont déterminés *au signe près.*

### Projections orthogonales.

**25.** Quand les projections sont orthogonales, la projection du segment directeur $oD$ d'un segment AB est égale au cosinus de l'angle que fait la direction des projections positives avec la direction positive $oy$ relative au segment AB.

Cette proposition est une conséquence évidente des remarques faites aux paragraphes 23 et 24. On a donc le théorème suivant :

**Théorème.** — *La projection orthogonale d'un segment* AB *sur un axe $x'x$ est égale à la valeur algébrique du segment multipliée*

*par le cosinus de l'angle que fait la direction des projections positives avec la direction positive relative au segment.*

Si l'on représente par $oD_1$, $oD_2$, ..., $oD_n$ les segments directeurs relatifs aux côtés AB, BC, ..., GA d'un polygone fermé, le théorème des projections donne la relation

$$U_1 \cos(oD_1, x'x) + \ldots + U_n \cos(oD_n, x'x) = 0.$$

## APPLICATION DU THÉORÈME DES PROJECTIONS A LA TRANSFORMATION DES COORDONNÉES.

### 1° Changement d'origine.

**26.** Supposons que l'on transporte les axes primitifs $ox$, $oy$ dans la position $o'x'$, $o'y'$; après ce transport, les axes des abscisses positives $ox$, $o'x'$ seront dirigés dans le même sens ainsi que les deux axes des ordonnées positives.

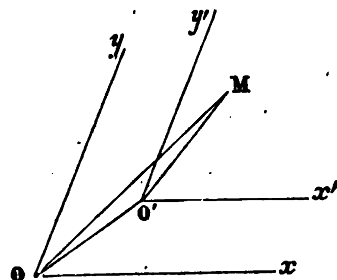


Fig. 21.

La position des nouveaux axes $o'x'$, $o'y'$ sera déterminée par les coordonnées $x_0, y_0$ de la nouvelle origine $o'$ relativement aux axes primitifs.

Prenons dans le plan un point quelconque M dont nous désignerons les coordonnées anciennes par $x$, $y$, et les coordonnées nouvelles par $x'$, $y'$. Joignons le point M aux points $o$, $o'$.

Le théorème des projections nous donne l'équation

$$\text{proj.}\, oM = \text{proj.}\, oo' + \text{proj.}\, o'M.$$

En projetant successivement sur $ox$ parallèlement à $oy$, puis sur $oy$ parallèlement à $ox$, l'équation précédente nous donnera les deux relations

$$(6) \qquad x = x_0 + x' \qquad y = y_0 + y'.$$

Ces formules résolvent le problème proposé.

### 2° Changement de la direction des axes.

**27. Définition.** — Soient $ox$, $oy$ deux axes de coordonnées et M un point quelconque du plan; menons par le point M une paral-

lèle MA à l'axe des $y$, terminée à l'axe des $x$; la ligne brisée $o$AM est appelée le *contour des coordonnées* du point M.

Cela posé, soient $ox, oy$ les axes primitifs des coordonnées positives, et supposons qu'on prenne les demi-droites $ox', oy'$ pour les nouveaux axes des coordonnées positives. Nous définirons la position des nouveaux axes en donnant les coordonnées $(u, v)$, $(u', v')$ de leurs points directeurs D, D'.

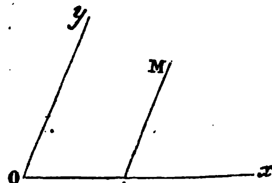


Fig. 22.

Désignons par $x, y$ les coordonnées anciennes et par $x', y'$ les coordonnées nouvelles d'un point quelconque M du plan. Construisons les contours $o$AM, $o$A'M des coordonnées anciennes et nouvelles, puis projetons successivement ces deux contours sur $ox$ parallèlement à $oy$ et sur $oy$ parallèlement à $ox$; nous aurons les deux relations

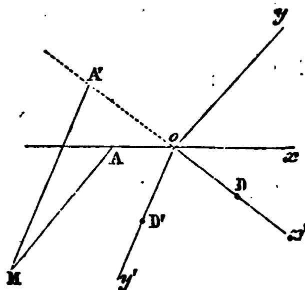


Fig. 23.

$$(7) \qquad \begin{aligned} x &= ux' + u'y' \\ y &= vx' + v'y' \end{aligned}$$

qui résolvent le problème proposé.

**Transformation générale.** — En combinant les formules (6) et (7), on obtient, pour le cas où l'on change à la fois l'origine et la direction des axes, les formules

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ux' + u'y' \\ y &= y_0 + vx' + v'y'. \end{aligned}$$

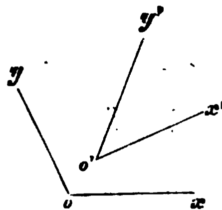


Fig. 24.

On voit que les formules de la transformation des coordonnées sont du premier degré par rapport à $x'$ et à $y'$.

**28.** Il est souvent avantageux d'introduire dans les formules (7) les angles $(ox, ox') = \alpha$, $(ox, oy') = \beta$. Soient D $(u, v)$ le point directeur du nouvel axe $ox'$ des abscisses positives, et $o$H une direction quelconque telle que $(ox, o\text{H}) = \omega$.

Projetons *orthogonalement* sur $oH$ le contour $odD$ des coordonnées du point D, la direction des projections positives étant $oH$, nous aurons la relation



Fig. 25.

$$(8)\quad u\cos\omega + v\cos(\omega-\theta) = \cos(\omega-\alpha)$$

En effet, un théorème démontré au paragraphe 23 donne

$$(oy, oH) + (oH, ox) + (ox, oy) = 2n\pi \text{ ou } (oy, oH) = 2n\pi + \omega - \theta$$
$$(oD, oH) + (oH, ox) + (ox, oD) = 2n'\pi \text{ ou } (oD, oH) = 2n'\pi + \omega - \alpha.$$

En remplaçant dans l'égalité (8) l'arbitraire $\omega$ successivement par $\theta + \frac{\pi}{2}$ et par $\frac{\pi}{2}$ on en tire

$$u = \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta} \qquad v = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta}.$$

On trouverait de même

$$u' = \frac{\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta} \qquad v' = \frac{\sin\beta}{\sin\theta}.$$

Les formules (7) deviennent donc

$$x = \frac{x'\sin(\theta-\alpha) + y'\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta}$$
$$y = \frac{x'\sin\alpha + y'\sin\beta}{\sin\theta}.$$

**Cas particulier.** — *Les deux systèmes d'axes sont rectangulaires.* Nous supposons que, pour obtenir les nouveaux axes $ox'$, $oy'$, on a fait tourner les anciens d'un angle $\alpha$. On a alors



Fig. 26.

$$\theta = \frac{\pi}{2} \qquad \beta = 2n\pi + \alpha + \frac{\pi}{2}$$

et les formules précédentes deviennent

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

**TRANSFORMATION DES COORDONNÉES RECTILIGNES EN COORDONNÉES POLAIRES.**

**29.** Soient $ox$, $oy$ deux axes de coordonnées rectangulaires; prenons pour pôle l'origine et pour axe polaire l'axe des $x$ positifs.

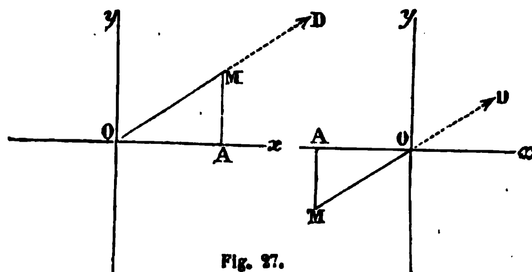


Fig. 27.

Appelons $(\rho, \omega)$ les coordonnées polaires du point M, et construisons le contour $o$AM de ses coordonnées rectilignes $(x, y)$.

Projetons orthogonalement sur $ox$, puis sur $oy$ les deux chemins $o$AM et $o$M; quel que soit le signe du rayon vecteur $\rho$, le théorème des projections nous donnera

$$x = \rho \cos(ox, oD) = \rho \cos\omega$$

$$y = \rho \cos(oy, oD) = \rho \cos[(ox, oy) - (ox, oD)]$$

$$= \rho \cos\left[\frac{\pi}{2} - \omega\right] = \rho \sin\omega,$$

en représentant par $o$D la direction qui correspond à l'angle polaire $\omega$.

Les formules

$$x = \rho \cos\omega \qquad y = \rho \sin\omega$$

permettront, dans les conditions où nous nous sommes placés, de passer des coordonnées rectilignes aux coordonnées polaires.

De ces formules on tire

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \cos\omega = \frac{x}{\rho} \qquad \sin\omega = \frac{y}{\rho} \qquad \text{tang}\,\omega = \frac{y}{x}.$$

Ces nouvelles formules permettront de passer des coordonnées polaires aux coordonnées rectilignes rectangulaires, en prenant pour origine le pôle, pour axe des $x$ l'axe polaire.

## DISTANCE DE DEUX POINTS.

**30.** Nous nous proposons de trouver l'expression de la distance de deux points en fonction des coordonnées de ces deux points.

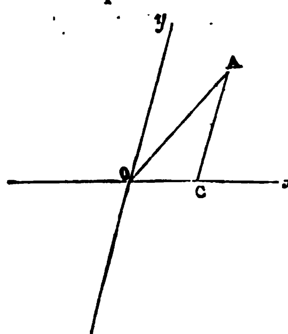


Fig. 28.

Supposons d'abord que l'un des points donnés B coïncide avec l'origine $o$ des coordonnées, et soient $(x, y)$ les coordonnées de l'autre point A. Posons $oA = l$, et appelons $\alpha$, $\beta$ les angles que les directions $ox$, $oy$ des coordonnées positives font avec la direction $oA$. Projetons maintenant orthogonalement sur $ox$, $oy$ et $oA$ le contour des coordonnées $oCA$ et le segment $oA$, nous aurons les relations

$$(9) \qquad \begin{cases} x + y\cos\theta = l\cos\alpha \\ x\cos\theta + y = l\cos\beta \\ x\cos\alpha + y\cos\beta = l, \end{cases}$$

entre lesquelles il faut éliminer $\cos\alpha$ et $\cos\beta$. Pour cela, il suffit d'ajouter les deux premières, après les avoir respectivement multipliées par $x$ et par $y$; en tenant compte de la troisième équation, on obtient la formule

$$l^2 = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta,$$

qui fait connaître la distance du point A à l'origine.

Cherchons maintenant la distance de deux points $A(x, y)$, $B(x', y')$ situés d'une manière quelconque dans le plan.

Pour ramener ce cas au précédent, transportons l'origine au point B, et soient alors $(x_1 . y_1)$ les coordonnées du point A : la formule précédente donne

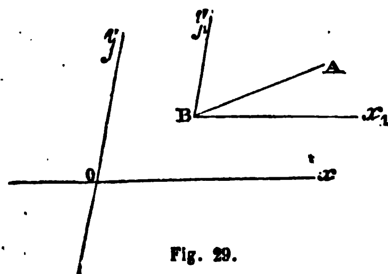


Fig. 29.

$$l^2 = x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 y_1 \cos\theta;$$

mais les formules relatives au changement d'origine donnent

$$x = x' + x_1 \quad y = y' + y_1;$$

d'où

$$x_1 = x - x' \quad y_1 = y - y';$$

par suite, on a

$$l^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y')\cos\theta.$$

**Cas particulier.** — Si les coordonnées sont rectangulaires, les formules précédentes deviennent

$$l^2 = x^2 + y^2$$
$$l^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2.$$

### RELATION ENTRE LES ANGLES QUE FONT LES AXES DES COORDONNÉES POSITIVES AVEC UNE DIRECTION DONNÉE.

**31.** Les relations (3) trouvées précédemment sont homogènes et linéaires par rapport aux quantités $x$, $y$, $l$; d'ailleurs, comme le point A ne coïncide pas avec l'origine, on n'a pas à la fois $l = x = y = 0$; donc le déterminant des quantités $x$, $y$, $l$ est nul, et l'on a

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & \cos\alpha \\ \cos\theta & 1 & \cos\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sin^2\theta = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta.$$

Telle est la relation qui lie les angles $\alpha$, $\beta$, que les directions positives des axes de coordonnées font avec une direction $o$A.

### CLASSIFICATION DES COURBES.

On divise les courbes rapportées à des coordonnées rectilignes en courbes algébriques et en courbes transcendantes, suivant que leur équation est algébrique ou transcendante.

Une équation est dite algébrique quand elle ne renferme que les signes des opérations suivantes :

ADDITION, SOUSTRACTION, MULTIPLICATION, DIVISION. — ÉLÉVATION AUX PUISSANCES. — EXTRACTION DE RACINES.

Elle est transcendante quand elle renferme d'autres symboles, tels que sin, cos, etc.

Quand l'équation d'une courbe est algébrique, on peut toujours, en faisant disparaître les radicaux et les dénominateurs, la mettre sous forme entière.

Cela posé, on classe les courbes algébriques d'après le degré de leur équation mise sous forme entière. Si cette équation est du degré $m$, on dit que la courbe est d'ordre $m$.

Pour légitimer cette classification, il faut montrer que le degré d'une équation mise sous forme entière ne peut pas être altéré par la transformation des coordonnées.

D'abord cette transformation ne peut pas élever le degré de l'équation, puisque les formules de la transformation des coordonnées sont du premier degré par rapport aux coordonnées nouvelles $x'$, $y'$.

En second lieu, le degré ne peut pas être abaissé, car, s'il en était ainsi, en revenant des nouveaux axes aux anciens, le degré de la nouvelle équation devrait s'élever, ce qui est impossible.

**32. Théorème.** — *Une courbe algébrique d'ordre m est rencontrée par une droite au plus en m points.*

Prenons la droite pour axe des $x$, et soit

$$f(x,y) = 0$$

l'équation de la courbe.

Pour avoir les abscisses des points où la courbe rencontre l'axe des $x$, nous devons faire $y = 0$ dans son équation, ce qui donne l'équation

$$f(x, 0) = 0,$$

qui a au plus $m$ racines, car elle est au plus du degré $m$.

# LIVRE II

## LIGNE DROITE ET CIRCONFÉRENCE.

---

## CHAPITRE PREMIER

### LIGNE DROITE.

**33.** L'équation générale du premier degré entre deux variables $x$ et $y$ est de la forme :

$$(1) \qquad Ax + By + C = 0.$$

La courbe représentée par cette équation ne pouvant être coupée par une droite en plus d'un point est elle-même une ligne droite.

Nous allons démontrer directement que l'équation (1) représente une droite.

Remarquons d'abord qu'on ne peut pas avoir à la fois $A = B = 0$, car alors on devrait avoir $C = 0$, et l'équation (1) se réduirait à une identité; mais il peut arriver que l'un des coefficients des variables $x$ ou $y$ soit nul.

1° Supposons $B = 0$. — L'équation (1) devient

$$Ax + C = 0;$$

on en tire

$$x = -\frac{C}{A} = a;$$

l'équation (1) représente donc le lieu des points dont l'abscisse est constante, c'est-à-dire une droite AA' parallèle à l'axe des $x$, l'abscisse du point A étant $a$.

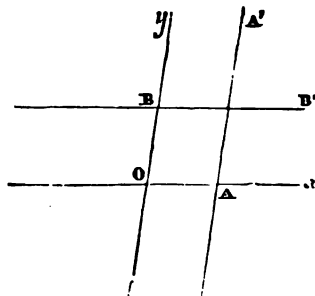


Fig. 30.

2° Supposons en second lieu $A = 0$. — L'équation (1) devient

$$By + C = 0;$$

on en tire

$$y = -\frac{C}{B} = b;$$

l'équation (1) représente donc le lieu des points dont l'ordonnée

est constante, c'est-à-dire une droite BB' parallèle à l'axe des $y$, l'ordonnée du point B étant $b$.

3° Supposons enfin que le coefficient B ne soit pas nul, on pourra alors résoudre l'équation (1) par rapport à $y$, ce qui donne

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B};$$

ou

(2) $$y = ax + b$$

en posant

$$-\frac{A}{B} = a, \quad -\frac{C}{B} = b.$$

Pour construire la courbe représentée par l'équation (2), nous supposerons d'abord $b = 0$, ce qui donne l'équation

(3) $$y = ax.$$

Cette équation étant satisfaite pour $x = y = 0$, la courbe qu'elle représente passe par l'origine.

Nous distinguerons deux cas :

1° $a > 0$. — L'équation (3) nous montre que les coordonnées $x$ et $y$ sont de même signe ; par suite, la courbe représentée par cette équation est tout entière dans les angles $yox$, $y'ox'$.

Prenons dans l'angle $yox$, par exemple, un point déterminé A de la courbe, et soient M et M' deux points variables de cette courbe situés l'un dans l'angle $yox$, l'autre dans l'angle $y'ox'$ ; construisons les contours des coordonnées des trois points A, M, M'.

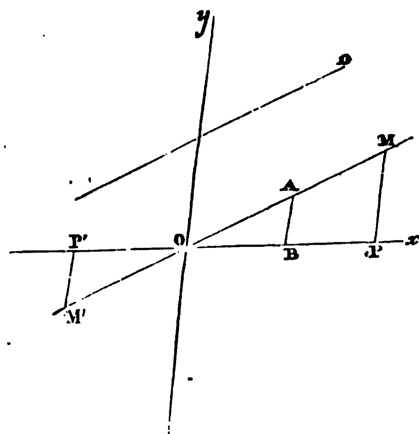


Fig. 31.

En écrivant que les coordonnées de ces points satisfont à l'équation (3), ou, ce qui est la même chose, à l'équation $a = \frac{y}{x}$, nous obtenons les relations

$$a = \frac{AB}{oB} = \frac{MP}{oP} = \frac{-M'P'}{-oP'};$$

d'où l'on tire

$$\frac{AB}{oB}=\frac{MP}{oP}=\frac{M'P'}{oP'}.$$

Cette dernière relation nous montre que les triangles M$o$P, M'$o$P' sont semblables au triangle $o$AB; par suite, les angles M$ox$, M'$ox'$ sont égaux à l'angle A$ox$, et les points variables M, M' sont situés sur la droite $o$A qui passe par l'origine.

2° $a<0$. — L'équation (3) nous montre que les coordonnées $x$ et $y$ sont de signes contraires; par suite, la courbe représentée par cette équation est tout entière dans les angles $x'oy$, $xoy'$.

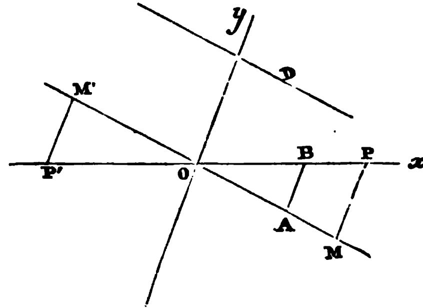


Fig. 32.

En raisonnant comme dans le cas précédent, on aura les relations

$$a=\frac{-AB}{oB}=\frac{-MP}{oP}=\frac{M'P'}{-oP'};$$

d'où l'on tire

$$\frac{AB}{oB}=\frac{MP}{oP}=\frac{M'P'}{oP'}.$$

Ces nouvelles relations montrent encore que les points variables M et M' sont situés sur la droite $o$A, qui passe par l'origine.

En résumé, l'équation $y=ax$ représente, dans tous les cas, une droite passant par l'origine.

Reprenons maintenant l'équation

(2) $$y=ax+b,$$

et posons

$$y_1=ax;$$

il en résultera

(4) $$y=y_1+b.$$

Nous venons de voir que l'équation $y_1=ax$ représente une droite $o$A passant par l'origine; d'un autre côté, la relation (4)

nous montre qu'on obtiendra les points de la courbe représentée par l'équation (2), en ajoutant la même quantité $b$ aux ordonnées de tous les points de la droite $o$A ; les points ainsi obtenus sont évidemment sur une droite D parallèle à la droite $o$A.

De ce qui précède résulte le théorème suivant :

**34. Théorème.** — *Toute équation du premier degré entre les deux variables $x$ et $y$ représente une ligne droite.*

Réciproquement, *toute ligne droite est représentée par une équation du premier degré.*

De l'origine, abaissons une perpendiculaire $o$D sur la droite donnée ; désignons par $p$ la longueur $o$D et par $\alpha, \beta$ les angles que font les directions $ox$, $oy$ des coordonnées positives avec la direction $o$D.

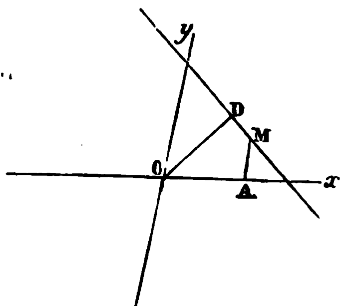


Fig. 33.

Prenons sur la droite un point quelconque M, construisons le contour de ses coordonnées, et projetons orthogonalement sur $o$D les deux chemins $o$AMD et $o$D ; la projection de MD étant nulle, nous aurons la relation

$$x\cos(ox,\, o\mathrm{D}) + y\cos(oy,\, o\mathrm{D}) = p,$$

c'est-à-dire la relation

$$(5) \qquad x\cos\alpha + \cos\beta = p.$$

Cette relation a lieu entre les coordonnées d'un point quelconque de la droite donnée ; or, elle est du premier degré ; par suite, la réciproque est démontrée.

**Cas particulier.** — Si les axes des coordonnées sont rectangulaires, on a

$$\cos\beta = \cos[(ox,\, o\mathrm{D}) - (ox,\, oy)] = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$$

et l'équation (5) devient

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

*Signification des coefficients dans l'équation $y = ax + b$.* — **De la**

méthode suivie pour démontrer que l'équation $y = ax + b$ représente une droite, il résulte :

1° Que cette droite est parallèle à celle qui a pour équation $y = ax$;

2° Qu'elle rencontre l'axe des $y$ en un point ayant $b$ pour ordonnée.

La constante $a$ est appelée le *coefficient angulaire* de la droite, et la constante $b$ son ordonnée à l'origine.

**Remarque.** — Le coefficient angulaire d'une droite est le coefficient de $x$ dans l'équation de la droite résolue par rapport à $y$.

**35. Condition pour que deux droites soient parallèles.**
Soient

$$Ax + By + C = 0 \qquad A'x + B'y + C' = 0$$

les équations de deux droites ; pour que ces droites soient parallèles, il faut et il suffit que leurs coefficients angulaires soient égaux, c'est-à-dire que l'on ait

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'} \quad \text{ou} \quad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'}.$$

**Théorème.** — *Pour que deux droites soient parallèles, il faut et il suffit que, dans les équations de ces droites, les coefficients de x et de y soient proportionnels.*

### PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE.

L'équation générale de la ligne droite

$$Ax + By + C = 0$$

renferme deux paramètres, car on peut toujours diviser les deux membres de l'équation par l'un des coefficients A, B, C.

Nous appellerons *condition simple* toute propriété géométrique qui, exprimée analytiquement, conduit à *une seule* équation.

On voit que deux conditions simples sont nécessaires pour fixer la position d'une droite dans le plan.

#### PROBLÈME I.

**36.** *Trouver l'équation générale des droites qui passent par un point donné* A $(x', y')$.

L'équation d'une droite quelconque est

$$y = ax + b;$$

on exprimera que cette droite passe par le point A en écrivant que les coordonnées $x'$, $y'$ de ce point satisfont à l'équation de la droite, ce qui donne l'équation de condition

$$y' = ax' + b.$$

Cette équation détermine l'un des deux paramètres $a$ ou $b$ en fonction de l'autre; on en tire, par exemple,

$$b = y' - ax';$$

en portant cette valeur dans l'équation de la droite, on obtient l'équation

$$y - y' = a(x - x').$$

Si dans cette équation on fait varier le coefficient arbitraire $a$, on obtiendra toutes les droites passant par le point A.

PROBLÈME II.

37. *Mener par un point donné* A $(x', y')$ *une parallèle à une droite donnée* D.

Soit $m$ le coefficient angulaire de la droite D; la droite cherchée devant passer par le point A, son équation est de la forme

$$y - y' = a\,(x - x').$$

Cette droite devant être parallèle à la droite D, on aura

$$a = m;$$

l'équation de la parallèle cherchée sera donc

$$y - y' = m\,(x - x').$$

PROBLÈME III.

38. *Trouver l'équation d'une droite passant par deux points donnés* A$(x', y')$, B$(x'', y'')$.

La droite cherchée devant passer par le point A, son équation sera de la forme

$$y - y' = a(x - x'); \qquad (6)$$

en exprimant que la droite passe par le point B, on aura pour déterminer le coefficient angulaire $a$ la relation

$$(6') \qquad y'' - y' = a(x'' - x');$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{y'' - y'}{x'' - x'};$$

en portant cette valeur de $a$ dans l'équation (6), on obtient pour l'équation de la droite AB

$$(7) \qquad \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{x - x'}{x'' - x'}.$$

**Cas particulier.** — Si le point B coïncide avec l'origine, on a

$$x'' = y'' = 0,$$

et l'équation (7) devient

$$\frac{y}{y'} = \frac{x}{x'};$$

quant au coefficient angulaire de la droite, il a pour expression

$$a = \frac{y'}{x'}.$$

**Autre solution.** — Prenons l'équation générale de la droite sous la forme

$$(8) \qquad Ax + By + C = 0;$$

en exprimant que cette droite passe par les deux points A et B, on obtient les deux relations

$$(9) \qquad \begin{cases} Ax' + By' + C = 0 \\ Ax'' + By'' + C = 0; \end{cases}$$

les équations (8) et (9) forment un système de trois équations du premier degré homogènes par rapport aux inconnues A, B, C; de plus, on ne peut pas avoir à la fois $A = B = C = 0$, car une droite qui passe par deux points n'est pas indéterminée; il résulte de là que le déterminant des inconnues A, B, C doit être nul; par suite, les coordonnées $x$, $y$ d'un point quelconque de la droite satisfont à la relation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

qui est l'équation de la droite.

*Équation d'une droite en fonction des coordonnées des points où elle rencontre les axes de coordonnées.* — Appelons $a$ l'abscisse du point A et $b$ l'ordonnée du point B, et soit

$$Ax+By+C=0$$

l'équation générale de la droite; en exprimant qu'elle passe par les points A $(a, 0)$, B $(0, b)$, on aura les deux relations

Fig. 34.

$$Aa+C=0 \quad Bb+C=0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{A}{C}=-\frac{1}{a} \quad \frac{B}{C}=-\frac{1}{b};$$

en portant ces valeurs dans l'équation générale de la droite, après avoir divisé cette équation par C, on obtient pour représenter la droite AB l'équation

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0.$$

PROBLÈME IV.

**39. Trouver le point d'intersection de deux droites** D, D.

Soient

$$(10) \qquad \begin{aligned} D &= Ax+By+C=0 \\ D' &= A'x+B'y+C'=0 \end{aligned}$$

les équations des deux droites : le problème revient à résoudre et à discuter les équations (10).

Cette question a été traitée en Algèbre; nous n'aurons ici qu'à interpréter géométriquement les résultats connus.

Nous désignerons par G le déterminant $AB'-BA'$ des inconnues $x$, $y$, et nous distinguerons deux cas.

**Premier cas.** *Le déterminant* G *n'est pas nul.* — Les deux droites se coupent en un point unique à distance finie.

**Deuxième cas.** *Le déterminant* G *est nul, mais un de ses éléments* A *par exemple n'est pas nul.*

Ce cas se subdivise en deux autres.

1° *Le déterminant* AC′ — CA′ *n'est pas nul.* — Les équations (10) sont incompatibles; comme G est nul on a l'identité

$$\lambda(D - C) + \lambda'(D' - C') \equiv 0,$$

les paramètres λ, λ′ n'étant pas nuls à la fois. Elle montre que les droites D, D′ transportées à l'origine se *confondent;* donc ces droites sont en général parallèles.

**Remarque.** — Dans ce cas, on peut avoir $A' = B' = 0$; la droite D′ est alors rejetée à l'infini.

2° *Le déterminant* AC′ — CA′ *est nul.* — Si l'on donne à $y$ une valeur arbitraire, l'équation $D = 0$ donne pour $x$ une valeur qui satisfait à l'équation $D' = 0$; donc tous les points de la droite D sont situés sur la droite D′, et les deux droites se confondent.

Il résulte de là que les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux droites se confondent sont

$$AB' - BA' = 0 \qquad AC' - CA' = 0$$

Il ne faut pas oublier que cela suppose $A \gtrless 0$.

**Remarque.** — Dans le cas qui nous occupe on peut avoir à la fois $A' = B' = C' = 0$; la droite D′ est alors indéterminée.

Pour compléter cette discussion, il reste à observer que si les coefficients A, B, A′, B′ sont *tous nuls*, les droites D, D′ sont rejetées à l'infini ou indéterminées.

PROBLÈME V.

**40.** ***Trouver l'équation générale des droites qui passent par le point de rencontre de deux droites données* D, D′.**

Soient

$$D = Ax + By + C = 0$$
$$D' = A'x + B'y + C' = 0$$

les équations des deux droites données. Ajoutons ces équations, après avoir multiplié l'une d'elles par une quantité arbitraire λ, nous obtiendrons l'équation

$$(11) \qquad D + \lambda D' = 0;$$

cette équation du premier degré par rapport à $x$ et à $y$ représente, quand on fait varier λ, un faisceau de droites passant par le point de concours M des deux droites D et D′; en effet, les coordonnées du point M annulant D et D′ annulent aussi la somme $D + \lambda D'$.

Je dis que l'équation (11) représente toutes les droites passant par le point M. Prenons en effet un point $A(x_1, y_1)$ sur une droite *quelconque* B passant par le point M, nous pourrons déterminer $\lambda$ de manière que l'équation (11) soit satisfaite pour $x = x_1$, $y = y_1$. La relation de condition sera

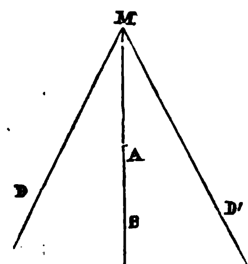


Fig 35.

$$D_1 + \lambda D'_1 = 0,$$

en représentant par $D_1$, $D'_1$ les valeurs que prennent les fonctions $Ax + By + C$, $A'x + B'y + C'$ quand on y remplace $x$ par $x_1$ et $y$ par $y_1$.

De cette relation on tire

$$\lambda = -\frac{D_1}{D'_1};$$

en substituant cette valeur dans l'équation (11), on obtient l'équation

$$\frac{D}{D_1} = \frac{D'}{D'_1},$$

qui représente une droite passant par les deux points M et A, c'est-à-dire la droite MA.

**41**. ***Équation d'une droite passant par un point donné*** $A(x_1, y_1)$ ***et par le point de concours de deux droites données*** D ***et*** D'.

Cette équation est

$$\frac{D}{D_1} = \frac{D'}{D'_1}$$

**Remarque.** — Reprenons l'équation

$$D + \lambda D' = 0,$$

en y faisant $\lambda = 0$, elle devient $D = 0$ et représente la droite D. On aurait pu écrire cette équation sous la forme

$$\frac{1}{\lambda} D + D' = 0;$$

donc elle représentera la droite D' quand on y fera $\frac{1}{\lambda} = 0$ ou $\lambda = \infty$.

THÉORÈME I.

**42.** *Quand l'équation d'une droite contient un paramètre arbitraire $\lambda$ au premier degré, toutes les droites qu'elle représente passent par un même point.*

En effet, l'équation de la droite est alors de la forme

$$D + \lambda D' = 0, \qquad (11)$$

et cette équation est satisfaite, *quel que soit* $\lambda$, par les coordonnées du point de concours des droites D et D' ayant pour équations

$$D = 0 \quad D' = 0.$$

**Remarque.** — Si les droites D et D' sont parallèles, les droites représentées par l'équation (11) sont toutes parallèles aux droites D et D'.

THÉORÈME II.

**43.** *Pour que l'équation* $Ax + By + C = 0$ *représente des droites passant par un même point, il faut et il suffit qu'il existe une relation homogène et linéaire entre les coefficients* A, B, C.

1° La condition est nécessaire; car, si toutes les droites représentées par l'équation considérée passent par un même point $M(x_1, y_1)$, on aura la relation

$$Ax_1 + By_1 + C = 0.$$

2° La condition est suffisante; car, en tenant compte de la relation $Ax_1 + By_1 + C = 0$, l'équation de la droite prend la forme

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0,$$

et cette équation ne contenant qu'un seul paramètre $\frac{A}{B}$ ou $\frac{B}{A}$ au premier degré, toutes les droites qu'elle représente passent par un point fixe ayant pour coordonnées $x = x_1$ $y = y_1$.

THÉORÈME III.

**44.** *Pour que trois droites ayant pour équations*

$$D_1 = 0 \quad D_2 = 0 \quad D_3 = 0$$

*concourent en un même point, il faut et il suffit qu'il existe entre les fonctions* $D_1$, $D_2$, $D_3$ *une relation linéaire et homogène.*

1° *La condition est nécessaire.* — Soient, en effet,

$$D_1 = A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$
$$D_2 = A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$
$$D_3 = A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$$

les équations des trois droites données $D_1$, $D_2$, $D_3$. L'équation

(12) $$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 = 0,$$

dans laquelle $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont des constantes indéterminées, représente toutes les droites passant par le point de concours A des droites $D_1$, $D_2$; comme, par hypothèse, la droite $D_3$ passe par le point A, elle pourra être représentée par l'équation (12); en d'autres termes il existera des constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ qui ne sont pas toutes nulles et telles que l'on aura identiquement

$$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \lambda_3 D_3 \equiv 0.$$

2° *La condition est suffisante.* — Supposons en effet que l'on ait l'identité

(13) $$\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \lambda_3 D_3 \equiv 0,$$

les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ n'étant pas toutes nulles. Pour fixer les idées, soit, par exemple, $\lambda_3 \gtrless 0$; de l'identité (13) on tire la nouvelle identité

$$D_3 \equiv -\frac{\lambda_1}{\lambda_3} D_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} D_2,$$

elle nous montre que la droite $D_3$ est représentée par l'équation

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} D_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} D_2 = 0.$$

Donc cette droite passe par le point de concours des droites $D_1$ et $D_2$.

*Expression analytique de la condition précédente.* — Pour que

les trois droites $D_1, D_2, D_3$ concourent, on doit avoir identiquement, c'est-à-dire quels que soient $x$ et $y$, la relation

$$(13) \qquad \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \lambda_3 D_3 \equiv 0,$$

ou, en remplaçant $D_1, D_2, D_3$ par leurs valeurs, la relation

$$\lambda_1 (A_1 x + B_1 y + C_1) + \lambda_2 (A_2 x + B_2 y + C_2) + \lambda_3 (A_3 x + B_3 y + C_3) \equiv 0;$$

les coefficients de $x$, de $y$ et le terme tout connu devant être nuls, on aura les équations suivantes :

$$(14) \qquad \begin{cases} A_1 \lambda_1 + A_2 \lambda_2 + A_3 \lambda_3 = 0 \\ B_1 \lambda_1 + B_2 \lambda_2 + B_3 \lambda_3 = 0 \\ C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 + C_3 \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Or ces équations sont homogènes par rapport aux quantités $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ qui ne sont pas toutes nulles par hypothèse; par suite, si les trois droites concourent, on aura la relation

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Réciproquement, quand cette relation a lieu, les trois droites $D_1, D_2, D_3$ concourent ; en effet, elle exprime qu'on peut satisfaire aux équations (14) par des valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, qui ne sont pas toutes nulles, et par suite l'identité (13) sera également satisfaite.

### PROBLÈME VI.

**45.** *Reconnaître si trois points donnés* $A(x', y')$, $B(x'', y'')$, $C(x''', y''')$ *sont en ligne droite.*

**Première Solution.** — Les droites BA, CA ont respectivement pour coefficient angulaire

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} \qquad \frac{y''' - y'}{x''' - x'}$$

pour que les trois points A, B, C soient en ligne droite, il faut et il suffit que les deux droites BA, CA coïncident, ce qui aura lieu si leurs coefficients angulaires sont égaux. La condition cherchée est donc

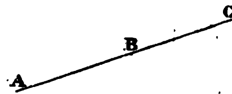


Fig. 38.

$$\frac{y'' - y'}{x'' - x'} = \frac{y''' - y'}{x''' - x'}.$$

**Deuxième Solution.** — L'équation de la droite BC est

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} = 0\,;$$

on exprimera que les trois points A, B, C sont en ligne droite en écrivant que les coordonnées du point A satisfont à l'équation de la droite BC, ce qui donne la relation

$$\begin{vmatrix} x' & y' & 1 \\ x'' & y'' & 1 \\ x''' & y''' & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

## DÉTERMINATION DES ANGLES.

**46. Définition.** — Soit D une droite passant par l'origine ; on appelle angle de l'axe des $x$ avec la droite D l'angle décrit en faisant tourner l'axe des $x$ *dans le sens direct* jusqu'à ce qu'il vienne coïncider avec la droite D.

**Remarque.** — A la définition précédente correspondent une infinité d'angles tels, que la différence entre deux quelconques de ces angles est un multiple de $\pi$.

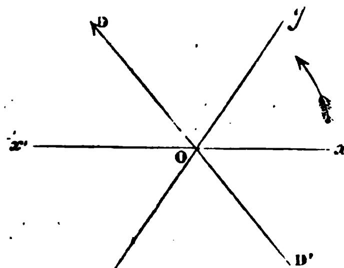


Fig. 37.

Soit, en effet, $\omega$ l'angle dont il faut faire tourner la direction $ox$ *dans le sens direct* pour la faire coïncider avec la direction $o$D ; quand cette droite, tournant toujours dans le même sens, viendra coïncider avec la direction $o$D', puis une seconde fois avec la direction $o$D, puis encore avec la direction $o$D', elle décrira des angles $\alpha$ compris dans la formule

$$\alpha = K\pi + \omega.$$

Si l'angle que nous avons défini n'est pas complètement déterminé, sa tangente est absolument déterminée.

**47.** Soit

$$y = ax$$

l'équation de la droite DD' ; nous allons exprimer le coefficient angulaire $a$ en fonction de l'angle $\alpha$ que fait l'axe des $x$ avec la droite DD'. Pour cela, nous distinguerons deux cas :

1° $a > 0$. La droite DD′ est alors située dans les angles $yox$, $y'ox'$. Appelons $\beta$ l'angle moindre que $\pi$ formé par les deux directions $ox$, $oD$, et prenons sur la demi-droite $oD$ un point quelconque A dont nous construirons le contour des coordonnées: le triangle $AoB$ nous donne

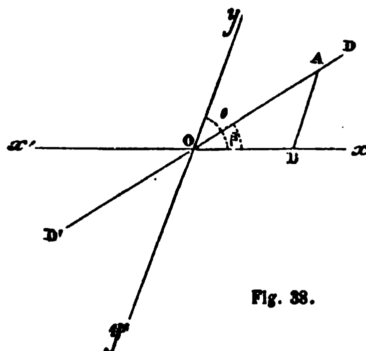


Fig. 38.

$$\frac{AB}{oB}=\frac{\sin AoB}{\sin oAB}=\frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)};$$

de plus, le point A étant sur la droite, on aura

$$a=\frac{y}{x}=\frac{AB}{oB};$$

d'où résulte la relation

$$a=\frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)}.$$

2° $a < 0$. La droite DD′ est alors située dans les angles $yox'$, $y'ox$. On a

$$\frac{AB}{oB}=\frac{\sin AoB}{\sin oAB}=\frac{\sin(\pi-\beta)}{\sin(\beta-\theta)}=-\frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)}$$

et

$$a=\frac{y}{x}=\frac{AB}{-oB};$$

d'où résulte encore la relation

$$a=\frac{\sin\beta}{\sin(\theta-\beta)};$$

maintenant, si l'on appelle $\alpha$ l'angle que fait l'axe des $x$ avec la droite DD′, on a

$$\alpha=k\pi+\beta;$$

d'où

$$\beta=\alpha-k\pi$$

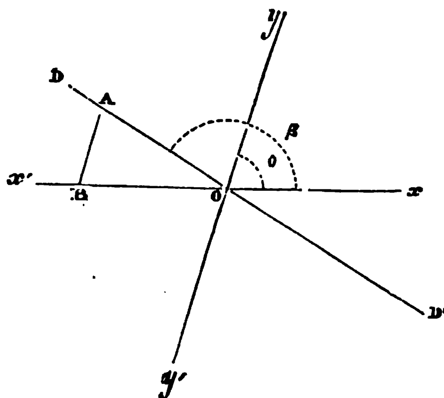


Fig. 39.

donc

$$a = \frac{\sin(\alpha - k\pi)}{\sin(\theta - \alpha + k\pi)};$$

si $k$ est pair, on peut supprimer l'arc $k\pi$ sans changer la valeur des sinus ; donc on a la relation

$$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}$$

Si $k$ est impair, on aura

$$\sin(\alpha - k\pi) = -\sin(k\pi - \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\sin(\theta - \alpha + k\pi) = -\sin(\theta - \alpha);$$

par suite, on a encore

(15) $$a = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

Dans la relation (15), $\alpha$ désigne un quelconque des angles que fait l'axe des $x$ avec la droite DD'.

Quand les axes sont rectangulaires, la relation (15) se réduit à

$$a = \operatorname{tang}\alpha;$$

si les axes sont obliques, on tire facilement de la même relation la formule

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a\sin\theta}{1 + a\cos\theta}.$$

**Remarque.** — Cette formule n'est pas calculable par logarithmes ; mais il est aisé de déduire de l'équation (15) une autre formule calculable par logarithmes.

On a, en effet,

$$\frac{a-1}{a+1} = \frac{\sin\alpha - \sin(\theta - \alpha)}{\sin\alpha + \sin(\theta - \alpha)} = \frac{\operatorname{tang}\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}};$$

d'où

$$\operatorname{tang}\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{a-1}{a+1}\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}.$$

**Cas particuliers.** — 1° *La droite* DD' *coïncide avec l'axe des* $y$. On a alors $\alpha = \theta$ ; par suite, le coefficient angulaire $a$ est infini.

Ainsi le coefficient angulaire d'une droite parallèle à l'axe des $y$ est infini.

En faisant coïncider DD' avec l'axe des $x$, on verrait que le coefficient angulaire d'une droite parallèle à l'axe des $x$ est nul.

2° *La droite* DD' *est perpendiculaire à l'axe des x.* — On a alors $\alpha = \frac{\pi}{2}$, et par suite $a = -\frac{1}{\cos\theta}$. L'équation d'une droite passant par l'origine et perpendiculaire à l'axe des $x$ est donc

$$x + y\cos\theta = 0.$$

3° *La droite* DD' *est perpendiculaire à l'axe des y.* — On a alors

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta,$$

et, par suite,

$$a = -\cos\theta.$$

L'équation d'une droite, passant par l'origine et perpendiculaire à l'axe des $y$, est donc

$$x\cos\theta + y = 0.$$

**Remarque.** — Posons

$$C = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta\,;$$

l'équation d'une droite perpendiculaire à l'axe des $x$ sera

$$C'_x = 0,$$

et l'équation d'une droite perpendiculaire à l'axe des $y$ sera

$$C'_y = 0.$$

**Définition.** — Nous appellerons première bissectrice la bissectrice de l'angle des coordonnées de même signe, et seconde bissectrice la bissectrice de l'angle des coordonnées de signes contraires.

La droite DD' coïncidant avec la première bissectrice, on a

$$\alpha = \frac{\theta}{2},$$

d'où

$$a = 1\,;$$

l'équation de la première bissectrice est donc

$$y = x.$$

La droite DD' coïncidant avec la seconde bissectrice, on a

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2},$$

d'où

$$a = -1;$$

l'équation de la seconde bissectrice est donc

$$y = -x.$$

**Remarque.** — On obtient immédiatement les équations des deux bissectrices en observant que les coordonnées d'un point quelconque de la première bissectrice sont égales et de même signe, et que les coordonnées d'un point quelconque de la seconde bissectrice sont égales et de signes contraires.

### THÉORÈME.

**48.** *Le coefficient angulaire $a$ est une fonction croissante de l'angle $\alpha$.*

On a, en effet,

$$a'_\alpha = \frac{\cos\alpha\sin(\theta-\alpha) + \sin\alpha\cos(\theta-\alpha)}{\sin^2(\theta-\alpha)} = \frac{\sin\theta}{\sin^2(\theta-\alpha)};$$

la dérivée $a'_\alpha$ étant positive, la fonction $a$ sera croissante dans les intervalles où elle est continue.

Quand $\alpha$ varie de 0 à $\theta - \varepsilon$, le coefficient angulaire $a$ croît de 0 à $+\infty$; quand $\alpha$ varie de $\theta - \varepsilon$ à $\pi$, le coefficient angulaire $a$ croît de $-\infty$ à 0.

**Définition.** — On appelle angle de la droite D avec la droite D' l'angle décrit en faisant tourner la droite D dans le sens direct, jusqu'à ce qu'elle vienne coïncider avec la droite D'.

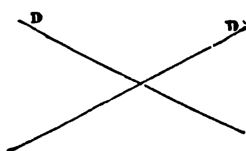


Fig. 40

**Remarque.** — A la définition précédente correspondent une infinité d'angles, tels que la différence entre deux quelconques de ces angles est un multiple de $\pi$.

Si l'angle que nous venons de définir n'est pas complètement déterminé, sa tangente est absolument déterminée.

PROBLÈME VII.

*Connaissant les équations de deux droites* D *et* D′, *trouver l'angle formé par la droite* D *avec la droite* D′.

Soient

$$y = ax \qquad y = a'x$$

les équations des droites D et D′ transportées à l'origine.

Faisons tourner l'axe des $x$ *dans le sens direct* jusqu'à ce qu'il vienne coïncider avec la droite D; puis continuons la rotation toujours dans le même sens, jusqu'à ce que la droite mobile coïncide avec D′.

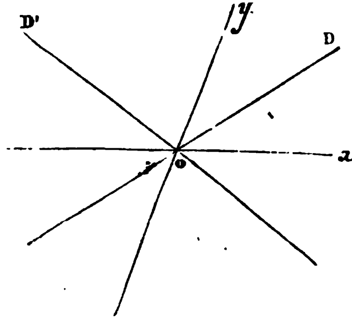


Fig. 41.

Dans le premier mouvement, la droite mobile décrira l'un des angles que nous avons désignés par $\alpha$; dans le second, elle décrira l'angle inconnu (D, D′), et après les deux rotations, elle aura décrit l'un des angles que nous avons désignés par $\alpha'$; on aura donc

$$\alpha' = (D, D') + \alpha,$$

d'où

$$(D, D') = \alpha' - \alpha,$$

et, par suite,

$$\operatorname{tang}(D, D') = \frac{\operatorname{tang}\alpha' - \operatorname{tang}\alpha}{1 + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{tang}\alpha'};$$

mais

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{a \sin\theta}{1 + a\cos\theta} \qquad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{a' \sin\theta}{1 + a'\cos\theta};$$

donc

$$(16) \qquad \operatorname{tang}(D, D') = \frac{(a' - a)\sin\theta}{1 + (a + a')\cos\theta + aa'}.$$

On trouverait de même

$$\operatorname{tang}(D', D) = \frac{(a - a')\sin\theta}{1 + (a + a')\cos\theta + aa'}.$$

**Règle.** — Pour obtenir la tangente de l'angle que fait la droite

D avec la droite D′, on forme le numérateur de la formule (16) en retranchant du coefficient angulaire de la droite D′ le coefficient angulaire de la droite D.

**Application.** — Par l'origine, on mène deux demi-droites $o$D, $o$D′ situées par rapport à l'axe des $x$ du côté des $y$ positifs; trouver la tangente de l'angle formé par ces deux demi-droites.

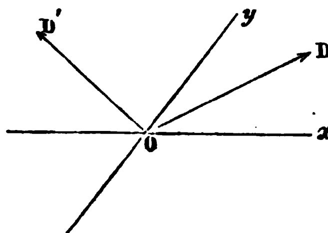


Fig. 42.

Pour fixer les idées, supposons qu'en faisant tourner dans le sens direct la demi-droite $ox$ on rencontre d'abord $o$D, puis $o$D′ ; dans cette hypothèse, l'angle inconnu V sera l'angle que fait la droite D avec la droite D′, ou plus exactement il différera d'un multiple de $\pi$ de l'angle (D, D′). On aura donc, en appelant $a$ et $a'$ les coefficients angulaires des droites D et D′:

$$\operatorname{tang} V = \operatorname{tang}(D, D') = \frac{(a' - a)\sin\theta}{1 + (a + a')\cos\theta + aa'}.$$

Nous allons établir la règle suivante, dont l'application ne présente aucune difficulté.

**Règle.** — Pour trouver l'angle de deux demi-droites passant par l'origine et situées par rapport à l'axe des $x$ du côté des $y$ positifs, il faut, dans la formule (16), donner au numérateur le signe du produit $aa'$.

Pour fixer les idées, nous supposerons toujours qu'en faisant tourner dans le sens direct la demi-droite $ox$ on rencontre d'abord $o$D, puis $o$D′, et nous distinguerons trois cas :

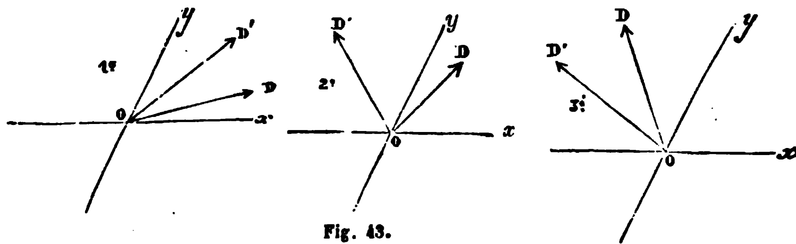


Fig. 43.

1° Les deux demi-droites $o$D, $o$D′ sont dans l'angle $yox$; on a alors à la fois

$$a' - a > 0 \qquad aa' > 0;$$

2° Les deux demi-droites $oD$, $oD'$ sont l'une dans l'angle $yox$, l'autre dans l'angle $yox'$.

On a alors à la fois

$$a' - a < 0 \quad aa' < 0;$$

3° Les deux demi-droites sont dans l'angle $yox'$ ; on a alors à la fois

$$a' - a > 0 \quad aa' > 0.$$

La règle énoncée se trouve donc établie.

*Condition de perpendicularité de deux droites.* — Quand les droites D et D' sont perpendiculaires, on a

$$\text{tang}(D, D') = \pm \infty ;$$

la condition cherchée est donc

$$1 + (a + a') \cos\theta + aa' = 0$$

en coordonnées obliques, et

$$1 + aa' = 0$$

en coordonnées rectangulaires.

*Condition de parallélisme de deux droites.* — Quand les droites D et D' sont parallèles, on a

$$\text{tang}(D, D') = 0;$$

la condition cherchée est donc

$$a = a'.$$

## DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE.

### PROBLÈME VIII.

49. 1° *D'un point donné* A $(x'\ y')$, *abaisser une perpendiculaire sur une droite donnée ;*

2° *Trouver la longueur de cette perpendiculaire.*

Soit

$$Ax + By + C = 0 \tag{17}$$

l'équation de la droite donnée : la perpendiculaire AB passant par le point A aura une équation de la forme

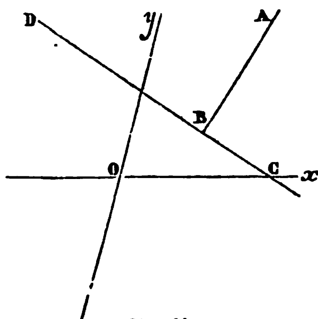


Fig. 44.

$$y - y' = m(x - x').$$

La condition de perpendicularité des deux droites AB, CD est

$$1 + \left(m - \frac{A}{B}\right)\cos\theta - m\frac{A}{B} = 0;$$

on en tire

$$m = \frac{A\cos\theta - B}{B\cos\theta - A};$$

par suite, l'équation de la perpendiculaire AB est

$$(18) \qquad y - y' = \frac{A\cos\theta - B}{B\cos\theta - A}(x - x').$$

Quand les coordonnées sont rectangulaires, l'équation précédente se simplifie et devient

$$y - y' = \frac{B}{A}(x - x'),$$

ou, sous une forme plus symétrique,

$$\frac{x - x'}{A} = \frac{y - y'}{B}.$$

*Longueur de la perpendiculaire.* — Pour trouver la longueur $d$ de la perpendiculaire AB, on pourrait calculer les coordonnées du pied B de cette perpendiculaire en considérant les équations (17) et (18) comme simultanées, puis calculer la distance des deux points A et B dont on connaît les coordonnées. On arrive plus rapidement au résultat de la manière suivante:

Supposons d'abord que le point A coïncide avec l'origine; en appelant $d$ la distance de l'origine à la droite, nous savons que cette droite peut être représentée par l'équation

$$(19) \qquad x\cos\alpha + y\cos\beta - d = 0.$$

Les équations (17) et (19) représentant la même droite sont identiques ; donc on a

$$\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{-d}{C};$$

d'où

$$\cos\alpha = -\frac{d}{C}A \qquad \cos\beta = -\frac{d}{C}B;$$

portons ces valeurs de $\cos\alpha$ et de $\cos\beta$ dans la relation

$$\sin^2\theta = \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\theta,$$

nous obtiendrons l'équation

$$\sin^2\theta = \frac{d^2}{C^2}(A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta);$$

d'où l'on tire

(20) $$d = \frac{C\sin\theta}{(A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

Supposons maintenant que le point A ne coïncide plus avec l'origine. Pour ramener ce cas au précédent, il suffira de transporter l'origine au point A en remplaçant dans l'équation (17) $x$ et $y$ par $x' + x$, $y' + y$. Dans le nouveau système, l'équation de la droite donnée sera

$$Ax + By + (Ax' + By' + C) = 0.$$

Pour avoir la distance du point A à la droite, il suffira de remplacer dans la formule (20) le coefficient C par le nouveau terme tout connu $Ax' + By' + C$, ce qui donne, pour exprimer la longueur de la perpendiculaire AB, la formule

(21) $$d = \frac{(Ax' + By' + C)\sin\theta}{(A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}.$$

**Remarque.** — Dans la formule (21), nous donnerons toujours au dénominateur sa valeur arithmétique ; dans ces conditions, pour que la formule soit générale, il faut regarder $d$ comme une quantité algébrique dont on détermine le signe par les considérations suivantes :

La droite donnée D partage le plan en deux régions, la région (1) qui s'étend vers les $y$ positifs ; la région (2) qui s'étend vers les $y$ négatifs.

Quand le point A se déplace dans l'une de ces deux régions, la fonction $D = Ax' + By' + C$ reste finie et ne s'annule pas ; par suite elle conserve *un signe constant.*

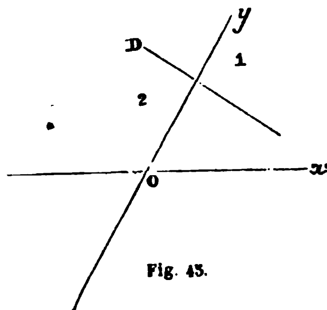


Fig. 43.

Pour déterminer ce signe constant, il suffira de donner au point A deux positions particulières.

Plaçons d'abord le point A sur l'axe des $y$ positifs, à une distance de l'origine aussi grande que l'on voudra, la fonction D devient $By' + C$; elle a donc le signe de $By'$ et, par suite, le signe de B, puisque l'ordonnée $y'$ est positive.

En plaçant le point A sur l'axe des $y$ négatifs à une distance de l'origine aussi grande que l'on voudra, on verra que la fonction D a un signe contraire à celui de B.

La région pour tous les points de laquelle on a $D > o$ est appelée la région *positive* du plan.

Celle pour tous les points de laquelle on a $D < o$ est appelée la région *négative* du plan.

Cela posé, la formule (21) sera générale si l'on fait la convention suivante :

*La distance d est regardée comme positive quand, par rapport à la droite* D, *le point* A *se trouve dans la région positive du plan; elle est regardée comme négative quand le point* A *se trouve dans la région négative du plan.*

Quand les coordonnées sont rectangulaires, la formule (21) se simplifie et devient

$$d = \frac{Ax' + By' + C}{(A^2 + B^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Quand l'équation de la droite est donnée sous la forme

$$y - ax - b = 0,$$

on a

$$d = \frac{(y' - ax' - b)\sin\theta}{(a^2 + 2a\cos\theta + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

si les coordonnées sont obliques, et

$$d = \frac{y' - ax' - b}{(a^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}$$

si les coordonnées sont rectangulaires.

Enfin quand l'équation de la droite est donnée sous la forme

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0,$$

on a

$$d = x'\cos\alpha + y'\cos\beta - p.$$

**Remarque.** — Soient $x', y'$ les coordonnées d'un point A, et

$$Ax + By + C = 0$$

l'équation d'une droite, l'expression $Ax' + By' + C$ est proportionnelle à la distance du point A à cette droite.

PROBLÈME IX.

**50.** *Trouver les équations des bissectrices des angles formés par deux droites données.*

Soient

$$Ax + By + C = 0 \quad A'x + B'y + C' = 0$$

les équations des deux droites données. Pour obtenir les équations des bissectrices cherchées, nous les considérerons comme le lieu des points également distants des deux droites ; on arrive ainsi immédiatement à l'équation suivante :

$$\frac{Ax + By + C}{(A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta)^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{(A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

**Remarque.** — Si les équations des deux droites étaient données sous la forme

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = 0 \quad x\cos\alpha' + y\cos\beta' - p' = 0,$$

les équations des deux bissectrices seraient

$$x\cos\alpha + y\cos\beta - p = \pm(x\cos\alpha' + y\cos\beta' - p'),$$

ou plus simplement

$$X = \pm Y,$$

en représentant par X et par Y les fonctions $x\cos\alpha + y\cos\beta - p$, $x\cos\alpha' + y\cos\beta' - p'$.

## ÉQUATIONS HOMOGÈNES.

THÉORÈME.

**51.** *Toute équation homogène et du degré m entre les coordonnées x et y représente un faisceau de m droites passant par l'origine.*

Soit, en effet,

$$f(x, y) = 0$$

une équation homogène et du degré $m$ : on a l'identité

(22) $$f(x, y) \equiv x^m f\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

Soient maintenant $a_1, a_2, \ldots, a_m$ les racines de l'équation

$$f\left(1, \frac{y}{x}\right) = 0,$$

où l'on considère $\frac{y}{x}$ comme l'inconnue, on aura l'identité

(23) $$f\left(1, \frac{y}{x}\right) \equiv \left(\frac{y}{x} - a_1\right)\left(\frac{y}{x} - a_2\right)\ldots\left(\frac{y}{x} - a_m\right).$$

Des identités (22) et (23) on déduit l'identité suivante :

$$f(x, y) \equiv (y - a_1 x)(y - a_2 x)\ldots(y - a_m x).$$

Elle montre que, pour satisfaire à l'équation $f(x,y) = 0$, il faut égaler à zéro l'une des quantités suivantes :

$$y - a_1 x \quad y - a_2 x \quad \ldots \quad y - a_m x.$$

Donc l'équation homogène $f(x,y) = 0$ représente $m$ droites passant par l'origine.

Aux valeurs réelles des coefficients angulaires $a_1, a_2, \ldots$ correspondent des droites réelles ; nous dirons qu'aux valeurs imaginaires des coefficients angulaires correspondent des droites imaginaires.

**Remarque.** — Pour avoir les coefficients angulaires des droites représentées par l'équation homogène

$$f(x, y) = 0,$$

il suffit de résoudre l'équation

$$f(1, a) = 0,$$

obtenue en remplaçant, dans la précédente, $x$ par 1 et $y$ par $a$.

PROBLÈME X.

**52.** *Trouver l'angle formé par les deux droites représentées par l'équation homogène du second degré.*

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy = 0.$$

Les coefficients angulaires des deux droites sont donnés par l'équation

$$Ca^2 + 2Ba + A = 0.$$

Soient $a'$, $a''$ les racines de cette équation et V l'angle inconnu, on aura

$$\operatorname{tang} V = \pm \frac{(a' - a'') \sin\theta}{1 + (a' + a'')\cos\theta + a'a''};$$

on doit affecter le second nombre d'un double signe, parce que l'on ne fixe pas ici celle des deux droites qui, tournant dans le sens direct, décrit l'angle V.

Des relations connues donnent

$$a' + a'' = -\frac{2B}{C} \qquad a'a'' = \frac{A}{C} \qquad a' - a'' = \pm \frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{C}.$$

Donc

$$(24) \qquad \operatorname{tang} V = \pm \frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A + C - 2B\cos\theta} \sin\theta.$$

*Condition de perpendicularité des deux droites.* — Cette condition est

$$A + C - 2B\cos\theta = 0.$$

**Application.** — On considère seulement les parties $oD$, $oD'$ des deux droites situées par rapport à l'axe des $x$ du côté des $y$ positifs, et l'on demande le signe qu'il faut donner au radical dans la formule (24) pour qu'elle représente la tangente de l'angle $DoD'$.

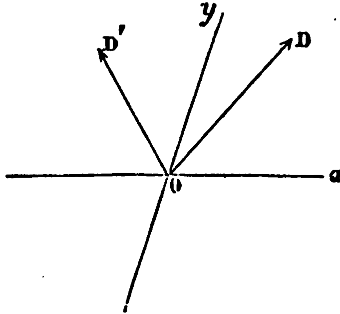


Fig. 46.

D'après une règle établie précédemment, il faut donner à la différence $\pm(a' - a'')$ le signe du produit $a'a''$. Or

$$\pm(a' - a'') = \pm 2\frac{\sqrt{B^2 - AC}}{C} \qquad a'a'' = \frac{A}{C}.$$

On devra donc dans la formule (24) donner au radical le signe du coefficient A.

PROBLÈME XI.

53. *Trouver l'équation des bissectrices des angles formés par les droites définies par l'équation*

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy = 0.$$

Soient toujours $a'$ et $a''$ les coefficients angulaires des deux droites, c'est-à-dire les racines de l'équation

$$Ca^2 + 2Ba + A = 0;$$

les équations des deux droites seront

$$y - a'x = 0 \quad y - a''x = 0,$$

et celles des bissectrices cherchées

$$\frac{y - a'x}{(a'^2 + 2a'\cos\theta + 1)^{\frac{1}{2}}} = \pm \frac{y - a''x}{(a''^2 + 2a''\cos\theta + 1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette équation rendue rationnelle et ordonnée devient :

$$(25) \qquad \begin{aligned} &y^2[a''^2 - a'^2 + 2(a'' - a')\cos\theta] \\ &\quad + x^2[(a'^2 - a''^2) + 2a'a''(a' - a'')\cos\theta] \\ &\quad\quad - 2xy[a' - a'' + a'a''(a'' - a')] = 0; \end{aligned}$$

l'équation (25) est divisible par $a'' - a'$ ; après la suppression de ce facteur, elle prend la forme

$$\begin{gathered}(a' + a'' + 2\cos\theta)\, y^2 - (a' + a'' + 2a'a''\cos\theta)\, x^2 \\ - 2(a'a'' - 1)\, xy = 0;\end{gathered}$$

mais

$$a' + a'' = -\frac{2B}{C} \qquad a'a'' = \frac{A}{C};$$

l'équation homogène du second degré qui représente les deux bissectrices est donc

$$(B - A\cos\theta)\, x^2 - (B - C\cos\theta)\, y^2 - 2(A - C)\, xy = 0.$$

**Remarque.** — Pour $a' = a''$, l'équation (25) devient une identité : pour expliquer ce résultat, remarquons que nous avons en réalité cherché le lieu des points également distants des deux

droites considérées ; or, quand on suppose $a' = a''$, les deux droites se confondent et tous les points du plan répondent à la question telle qu'on l'a résolue.

PROBLÈME XII.

**54.** *Trouver l'équation du faisceau de droites joignant l'origine aux points de rencontre de deux courbes données* C *et* C'.

Soient

$$f(x, y) = 0 \qquad \varphi(x, y) = 0$$

les équations des deux courbes données, $A_1(x_1, y_1)$ un de leurs points de rencontre.

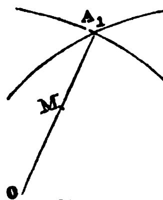


Fig. 47.

Sur la droite $oA_1$, prenons un point quelconque $M(x,y)$; les trois points $o$, M, $A_1$ étant en ligne droite, on aura

$$\frac{y_1}{y} = \frac{x_1}{x} = \frac{1}{t},$$

en représentant par $\frac{1}{t}$ la valeur commune des deux rapports $\frac{y_1}{y}$, $\frac{x_1}{x}$.

De la relation précédente on tire

$$x_1 = \frac{x}{t} \qquad y_1 = \frac{y}{t};$$

le point $A_1$ appartenant aux courbes C et C', on aura

$$f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) = 0 \qquad \varphi\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right) = 0.$$

Si, entre ces deux équations homogènes par rapport aux trois quantités $x$, $y$, $t$, on élimine $t$, on obtiendra une équation

$$\psi(x, y) = 0$$

homogène par rapport aux coordonnées $x$ et $y$. Cette équation, qui est satisfaite par les coordonnées d'un point quelconque des droites $oA_1$, $oA_2$, ..., représentera le faisceau formé par ces droites.

**Règle.** — *Pour trouver l'équation du faisceau de droites joignant l'origine aux points de rencontre de deux courbes données,*

*on rend les équations des deux courbes homogènes en y remplaçant x et y par $\frac{x}{t}$ et $\frac{y}{t}$ ; puis, entre les équations ainsi modifiées, on élimine le paramètre t.*

**Remarque.** — Si le sommet du faisceau de droites était un point quelconque S ($\alpha$, $\beta$) ne coïncidant pas avec l'origine, on commencerait par transporter l'origine au point S, puis dans l'équation

$$\psi(x, y) = 0,$$

obtenue comme précédemment, on remplacerait $x$ et $y$ par $x - \alpha$ et $y - \beta$.

**Cas particulier.** — On a souvent à chercher l'équation du faisceau de droites joignant l'origine aux points où une droite D rencontre une courbe algébrique C : on peut alors écrire immédiatement l'équation du faisceau de droites.

Dans l'équation de la courbe C mise sous forme entière, groupons ensemble les termes de même degré ; en désignant généralement par $\varphi_p(x, y)$ l'ensemble des termes du degré $p$, cette équation prendra la forme

$$\varphi_m(x, y) + \varphi_{m-1}(x, y) + \dots + \varphi_1(x, y) + \varphi_0 = 0.$$

Prenons l'équation de la droite D sous la forme

$$ux + vy = 1.$$

Les équations de la courbe C et de la droite D rendues homogènes sont

$$\varphi_m(x, y) + t\varphi_{m-1}(x, y) + \dots + t^m\varphi_0 = 0$$
$$ux + vy = t;$$

il faut entre ces deux équations éliminer $t$, et l'on obtient, pour représenter le faisceau de droites, l'équation

$$\varphi_m(x,y) + (ux + vy)\varphi_{m-1}(x,y)$$
$$+ (ux + vy)^2\varphi_{m-2}(x,y) + \dots + (ux + vy)^m\varphi_0 = 0.$$

On peut donc énoncer la règle suivante :

**Règle.** — *Pour avoir l'équation du faisceau de droites joignant l'origine aux points où une droite* D *rencontre une courbe algébrique* C, *il suffit de multiplier les termes de l'équation de la courbe*

*par des puissances de $ux + vy$, telles qu'après cette multiplication, tous les termes soient du même degré.*

**Application.** — *On coupe la courbe du troisième degré qui a pour équation*

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + xy = 0$$

*par une droite* D; *trouver la condition nécessaire et suffisante pour que la corde qui joint deux des points de rencontre soit vue de l'origine sous un angle droit.*

Nous supposons la courbe rapportée à des axes de coordonnées rectangulaires.

L'équation de la droite D étant

$$ux + vy = 1,$$

l'équation du faisceau de droites joignant l'origine aux trois points où la droite D coupe la courbe sera

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 + xy(ux + vy) = 0.$$

Les coefficients angulaires de ces trois droites sont donnés par l'équation

$$(26) \qquad dm^3 + (3c + v)m^2 + (3b + u)m + a = 0.$$

Appelons $m_1$, $m_2$, $m_3$ les racines de cette équation; puisque deux des trois droites du faisceau sont perpendiculaires, on aura la relation

$$m_2 m_3 = -1\,;$$

on a d'ailleurs

$$m_1 m_2 m_3 = -\frac{a}{d}\,;$$

donc

$$m_1 = \frac{a}{d}\,.$$

En exprimant que $\frac{a}{d}$ satisfait à l'équation (26), on obtient la relation de condition

$$(27) \qquad a^2 + (3c + v)a + (3b + u)d + d^2 = 0.$$

La relation (27) est du premier degré par rapport aux coefficients $u$ et $v$; donc les droites D passent par un point fixe.

**Remarque.** — Nous verrons plus tard que la courbe du troisième degré considérée a un point double à l'origine, et que les tangentes aux deux arcs passant par ce point double sont rectangulaires ; nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME.

*Quand une courbe du troisième degré a un point double* O, *et que les tangentes en ce point sont rectangulaires, les cordes qui sont vues du point double sous un angle droit passent par un point fixe.*

**EXPRESSION DE LA SURFACE D'UN TRIANGLE EN FONCTION DES COORDONNÉES DES SOMMETS.**

**55.** Soient

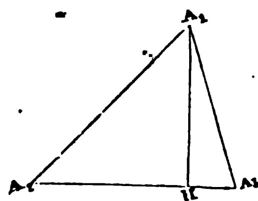


Fig. 48.

$$A_1(x_1\ y_1) \quad A_2(x_2\ y_2) \quad A_3(x_3\ y_3)$$

les trois sommets du triangle ; l'équation de la base $A_2 A_3$ sera

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

et la hauteur $A_1H$ aura pour expression

$$A_1H = \pm \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin\theta}{[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 + 2(x_2 - x_3)(y_2 - y_3)\cos\theta]^{\frac{1}{2}}}.$$

Le dénominateur représente justement la longueur $A_2 A_3$ de la base du triangle ; donc, en appelant S sa surface, on aura

$$(28) \qquad 2S = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin\theta.$$

Dans le second membre de la formule (28), on devra choisir le signe de manière que ce second membre soit positif ; nous allons établir une règle permettant de fixer ce signe.

Supposons que le triangle se déplace dans son plan, les coordonnées de ses sommets varieront d'une manière continue ; donc, si le second membre de la relation (28) peut varier, il variera d'une manière continue. Or, ce second membre ne peut prendre que les valeurs 2S ou — 2S ; donc, il restera constant.

Il résulte de là que, pour déterminer le signe qu'on doit prendre dans le second membre de l'équation (28), on peut donner au triangle une position particulière en le déplaçant dans son plan.

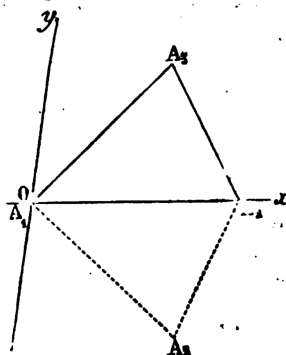


Fig. 49.

Amenons le sommet $A_1$ à l'origine et le sommet $A_2$ sur l'axe des $x$ positifs ; on aura

$$2S = \pm \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin\theta = \pm x_2 y_3 \sin\theta$$

Deux cas peuvent se présenter :

1° *Le sommet* $A_3$ *est, par rapport à l'axe des* $x$, *du côté des* $y$ *positifs.* — Le produit $x_2 y_3 \sin\theta$ étant alors positif, on doit dans le second nombre de l'équation (28) affecter le déterminant du signe $+$.

Dans ce cas, un mobile qui parcourt les côtés du triangle dans l'ordre $A_1 A_2 A_3$ indiqué par les lignes du déterminant à partir de la première tourne dans *le sens direct ;*

2° *Le sommet* $A_3$ *est, par rapport à l'axe des* $x$, *du côté des* $y$ *négatifs.* — Le produit $x_2 y_3 \sin\theta$ étant négatif, on doit dans le second membre de l'équation (28) affecter le déterminant du signe $-$.

Dans ce cas, un mobile qui parcourt les côtés du triangle dans l'ordre $A_1 A_2 A_3$ indiqué par les lignes du déterminant à partir de la première tourne dans *le sens indirect.*

Nous pouvons donc énoncer la règle suivante :

**Règle.** — *Dans le second membre de la formule* (28), *on affectera le déterminant du signe* $+$ *quand un mobile parcourant les côtés du triangle, dans l'ordre indiqué par les lignes du déterminant à partir de la première, tournera dans le sens direct.*

*On affectera ce déterminant du signe* $-$ *si le mobile tourne dans le sens indirect.*

**Cas particulier.** — Quand le sommet $A_3$ coïncide avec l'origine, la formule (28) devient

$$\pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \sin\theta.$$

PROBLÈME XIII.

56. *Connaissant les équations des trois côtés d'un triangle, trouver la surface.*

Soient

$$\begin{array}{ll} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 & A_2 A_3 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 & A_3 A_1 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 = 0 & A_1 A_2 \end{array}$$

les équations des trois côtés du triangle.

Désignons par $(x_1, y_1)$ $(x_2, y_2)$ $(x_3, y_3)$ les coordonnées des sommets $A_1$, $A_2$, $A_3$, nous aurons

$$2S = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin\theta.$$

Pour calculer les coordonnées des sommets du triangle, posons

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

et représentons par $A_1$, $B_1$, $C_1$, ... les mineurs du premier ordre du déterminant D, relatifs aux éléments $a_1$, $b_1$, $c_1$, ... ; nous aurons

$$\frac{x_1}{A_1} = \frac{y_1}{B_1} = \frac{1}{C_1} \quad \frac{x_2}{A_2} = \frac{y_2}{B_2} = \frac{1}{C_2} \quad \frac{x_3}{A_3} = \frac{y_3}{B_3} = \frac{1}{C_3};$$

par suite,

$$2S = \pm \begin{vmatrix} \frac{A_1}{C_1} & \frac{B_1}{C_1} & 1 \\ \frac{A_2}{C_2} & \frac{B_2}{C_2} & 1 \\ \frac{A_3}{C_3} & \frac{B_3}{C_3} & 1 \end{vmatrix} \sin\theta,$$

ou

$$2S = \pm \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \frac{\sin\theta}{C_1 C_2 C_3};$$

multiplions respectivement par $a_1$, $a_2$, $a_3$ la première, la deuxième

et la troisième ligne du dernier déterminant, puis ajoutons les résultats pour former la première ligne d'un nouveau déterminant, nous aurons

$$2S = \pm \begin{vmatrix} D & 0 & 0 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \frac{\sin\theta}{a_1 C_1 C_2 C_2} = \pm \frac{D \sin\theta}{a_1 C_1 C_2 C_3} (B_2 C_3 - C_2 B_3).$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} B_2 C_3 - C_2 B_3 &= (a_1 c_3 - c_1 a_3)(a_1 b_2 - b_1 a_2) \\ &\quad - (a_1 b_3 - b_1 a_3)(a_1 c_2 - c_1 a_2) = a_1 D; \end{aligned}$$

par conséquent

$$2S = \pm \frac{D^2 \sin\theta}{C_1 C_2 C_3}.$$

**Remarque.** — On arrive immédiatement à ce résultat en remarquant que le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$$

est le réciproque du déterminant D et par suite égal à $D^2$.

## EXPRESSION DES COORDONNÉES D'UN POINT VARIABLE D'UNE DROITE EN FONCTION D'UN SEUL PARAMÈTRE.

**57. Première Solution.** — Par l'origine menons à la droite donnée une parallèle sur laquelle nous prendrons un point quelconque $D(a, b)$; soient $x_0, y_0$ les coordonnées d'un point fixe A de cette droite, et $x, y$ les coordonnées d'un point variable M de la même droite.

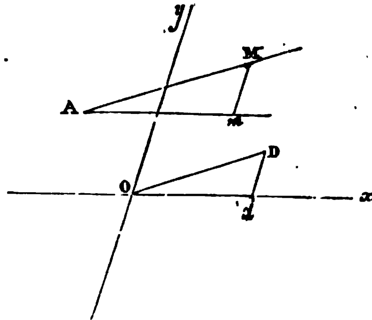


Fig. 50.

Construisons le contour des coordonnées du point D et menons par le point A parallèlement à l'axe des $x$ une droite qui rencontre au point $m$ l'ordonnée du point M : les deux triangles semblables $MAm$, $Dod$

nous donnent

$$\frac{Am}{od} = \frac{Mm}{Dd} = \frac{AM}{oD},$$

c'est-à-dire

$$(29) \qquad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \rho,$$

en posant $\rho = \frac{Am}{oD}$. On vérifie facilement que l'équation (29) est générale, pourvu que l'on regarde $\rho$ comme positif quand les directions AM et $o$D sont de même sens, et $\rho$ comme négatif quand ces directions sont de sens contraire.

Les équations (29) donnent

$$(30) \qquad x = x_0 + a\rho \qquad y = y_0 + b\rho,$$

et les coordonnées du point M sont exprimées en fonction du paramètre $\rho$.

On emploie souvent les équations (29) pour trouver les coordonnées des points où une droite rencontre une courbe.

Pour cela, dans l'équation de la courbe

$$f(x, y) = 0$$

on remplace $x$ et $y$ par leurs valeurs tirées des formules (30), ce qui donne l'équation

$$f(x_0 + a\rho, \quad y_0 + b\rho) = 0;$$

en portant dans les formules (30) les valeurs de $\rho$ tirées de l'équation précédente, on obtient les coordonnées des points de rencontre de la courbe et de la droite.

**Signification des coefficients.** — 1° $x_0$ et $y_0$ représentent les coordonnées d'un point déterminé A de la droite.

2° $a$ et $b$ sont les coordonnées d'un point D de la parallèle menée à la droite par l'origine ; nous les appellerons coefficients de direction.

3° $\rho$ représente le rapport $\frac{AM}{oD}$, M étant un point quelconque de la droite ; ce rapport est positif quand les directions AM et $o$D sont de même sens, il est négatif quand ces directions sont de sens contraire.

**Remarque.** — Si la distance $o$D est égale à l'unité de longueur,

la valeur absolue de $\rho$ représente la distance du point M au point A.

On a alors

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta = 1.$$

**Cas particulier.** — Supposons toujours $oD = 1$ et les axes de coordonnées rectangulaires, on a alors

$$a = \cos\alpha \qquad b = \sin\alpha,$$

en appelant $\alpha$ l'angle que la direction $ox$ fait avec la direction $oD$, et les équations (29) deviennent

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha} = \rho.$$

**58. Seconde solution.** — Prenons sur la droite deux points fixes $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$, et soit $M(x, y)$ un point variable de cette droite.

Nous supposerons d'abord ce point situé entre A et B, et nous poserons

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\lambda}.$$

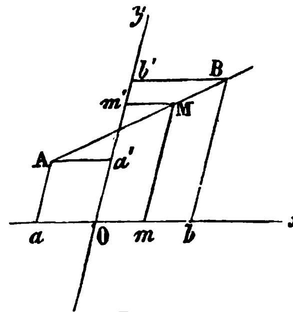


Fig. 51.

Pour trouver les coordonnées du point M, nous nous appuierons sur la remarque suivante qui est souvent utile :

Lorsqu'une relation *homogène* a lieu entre des segments situés sur une même droite ou sur des droites parallèles, elle reste vraie quand on projette tous ces segments sur un axe quelconque.

Cela posé, projetons les segments MA, MB sur $ox$ parallèlement à $oy$ et sur $oy$ parallèlement à $ox$, nous aurons les deux relations

$$\frac{ma}{mb} = \frac{\mu}{\lambda} \qquad \frac{m'a'}{m'b'} = \frac{\mu}{\lambda},$$

ou

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{\mu}{\lambda} \qquad \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{\mu}{\lambda}.$$

On tire de là

(31) $$x=\frac{\lambda x_1+\mu x_2}{\lambda+\mu}\qquad y=\frac{\lambda y_1+\mu y_2}{\lambda+\mu}.$$

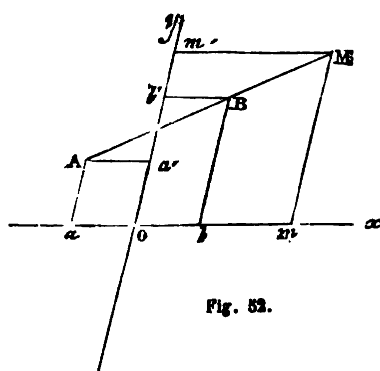



Fig. 52.

Supposons maintenant que le point M ne soit pas situé entre les points A et B, on aura toujours les deux relations

$$\frac{ma}{mb}=\frac{\mu}{\lambda}\qquad\frac{m'a'}{m'b'}=\frac{\mu}{\lambda},$$

ou bien

$$\frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{\mu}{\lambda}\qquad\frac{y-y_1}{y-y_2}=\frac{\mu}{\lambda};$$

on tire de là

$$x=\frac{\lambda x_1-\mu x_2}{\lambda-\mu}\qquad y=\frac{\lambda y_1-\mu y_2}{\lambda-\mu}.$$

Ces nouvelles formules ne diffèrent des formules (31) que par le changement de $\mu$ en $-\mu$.

En résumé, les formules (31) sont générales si l'on convient de placer le point M entre les points A et B quand $\lambda$ et $\mu$ sont de même signe, et de le placer en dehors du segment AB quand $\lambda$ et $\mu$ sont de signes contraires.

Dans ce dernier cas, puisque l'on a en valeur absolue $\frac{MA}{MB}=\frac{\mu}{\lambda}$, le point M sera plus rapproché du point A que du point B quand on aura en valeur absolue $\frac{\mu}{\lambda}<1$; le contraire aura lieu si l'on a toujours en valeur absolue $\frac{\mu}{\lambda}<1$.

Les formules (31) expriment les coordonnées $x$ et $y$ en fonction du paramètre $\frac{\mu}{\lambda}$. On les emploie comme les équations (29) pour trouver les coordonnées des points où une droite AB rencontre une courbe.

Pour cela, dans l'équation de la courbe

$$f(x, y) = 0,$$

on remplace $x$ et $y$ par leurs valeurs tirées des formules (31); ce qui donne l'équation

$$f\left(\frac{\lambda x_1 + \mu y_1}{\lambda + \mu}, \frac{\lambda x_2 + \mu y_2}{\lambda + \mu}\right) = 0;$$

en portant dans les formules (31) les valeurs de $\frac{\mu}{\lambda}$ tirées de l'équation précédente, on obtient les coordonnées des points de rencontre de la courbe et de la droite.

### CENTRE DES DISTANCES PROPORTIONNELLES.

**59.** *Étant donnés dans le plan p points* $A_1, A_2, \ldots, A_p$ *auxquels correspondent des paramètres* $m_1, m_2, \ldots, m_p$ *positifs ou négatifs, on prend sur la droite* $A_1 A_2$ *un point* $B_1$, *tel que ses distances aux deux points* $A_1$ *et* $A_2$ *soient dans le rapport de* $m_2$ *à* $m_1$ ; *puis, sur la droite* $B_1A_3$, *on prend un point* $B_2$, *tel que ses distances aux points* $B_2$ *et* $A_3$ *soient dans le rapport de* $m_3$ *à* $m_1 + m_2$ ; *puis, sur la droite* $B_2A_4$ *un point* $B_3$, *tel que ses distances aux points* $B_2$ *et* $A_4$ *soient dans le rapport de* $m_4$ *à* $m_1 + m_2 + m_3$, *et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive au point* $A_p$; *trouver les coordonnées du dernier point* $B_{p-1}$ *ainsi obtenu.*

Appelons $(x_1y_1)$ $(x_2y_2) \ldots$ $(x_py_p)$ les coordonnées des points donnés $A_1, A_2, \ldots, A_p$ et $(\alpha_1, \beta_1)$ $(\alpha_2, \beta_2), \ldots, (\alpha, \beta)$, celles des points $B_1, B_2, \ldots, B_{p-1}$, nous aurons, en appliquant la formule (31),

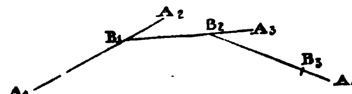


Fig. 53.

$$\alpha_1 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\alpha_2 = \frac{(m_1 + m_2)\alpha_1 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

et enfin

$$\alpha = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_p x_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p} = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}$$

$$\beta = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots + m_p y_p}{m_1 + m_2 + \ldots + m_p} = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}.$$

On voit que la position du dernier point $B_{p-1}$ est indépendante de l'ordre dans lequel on prend les points donnés.

Ce point $B_{p-1}$ est appelé centre des distances proportionnelles des points $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

**Centre des moyennes distances.** — Lorsqu'on a

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_p,$$

le point $B_{p-1}$ devient le centre des moyennes distances des points donnés; ses coordonnées ont pour expression

$$\alpha = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_p}{p} = \frac{\Sigma x}{p}$$

$$\beta = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_p}{p} = \frac{\Sigma y}{p}.$$

## RAPPORT ANHARMONIQUE.

**60. Définition.** — *On appelle rapport anharmonique de quatre points a, b, c, d situés en ligne droite le rapport des distances de l'un des points à deux des autres, divisé par le rapport des distances du quatrième point à ces deux-là.*

Le rapport anharmonique est une quantité algébrique dont on détermine le signe par la règle générale des signes, appliquée aux segments qui entrent dans ce rapport.

Les quatre points $a, b, c, d$ donnent lieu à six rapports anharmoniques; les rapports

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} \qquad \frac{ad}{ab} : \frac{cd}{cb} \qquad \frac{ab}{ac} : \frac{db}{dc}$$

que nous désignons par $\lambda$, $\mu$, $\nu$ et leurs inverses

$$\frac{ad}{ac} : \frac{bd}{bc} \qquad \frac{ab}{ad} : \frac{cb}{cd} \qquad \frac{ac}{ab} : \frac{dc}{db}.$$

La connaissance d'un des rapports $\lambda, \mu, \nu$ détermine tous les autres.

**Lemme.** — *Étant donnés quatre points a, b, c, d situés en ligne droite, on a entre les segments qu'ils déterminent deux à deux la relation*

(A) $$ab.cd + ac.db + ad.bc = 0.$$

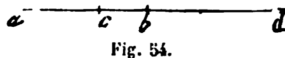


Fig. 54.

Appelons $u$ le premier membre de la relation à établir, nous aurons

$$u = ab.cd + ac.db + ad\,(dc + bd) = (ab + da)\,cd + (ac + da)\,db,$$

car $bc = dc + bd$ (18). Mais on a aussi

$$ab + da = db \qquad ac + da = dc;$$

donc

$$u = db.cd + dc.db = 0.$$

Cela posé en divisant l'équation (A) successivement par ses trois termes, on obtient les relations

$$1 - \lambda = \frac{1}{\mu} \quad 1 - \mu = \frac{1}{\nu} \quad 1 - \nu = \frac{1}{\lambda}.$$

Elles font connaître deux des rapports $\lambda$, $\mu$, $\nu$, quand l'un d'eux est donné.

**Remarque.** — Pour former l'équation (A), on considère à part les trois points $b, c, d$ qui donnent lieu à la relation $bc + cd + db = 0$, dont on multiplie les termes respectivement par les segments $ad, ab, ac$.

LEMME.

**61**. *Quatre droites concourantes sont coupées par une transversale quelconque en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.*

Soient

$$y = ax \quad y = bx \quad y = cx \quad y = dx$$

les équations des quatre droites A, B, C, D, dont on prend le point de concours O pour origine. Ces droites sont rencontrées par une sécante quelconque en des points A, B, C, D, et il s'agit de démontrer que le rapport anharmonique

$$\lambda = \frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$$

est indépendant de la position de la sécante.

Appelons $x_1$ l'abscisse du point A ; son ordonnée sera $ax_1$, et l'équation de la sécante pourra être mise sous la forme

$$\frac{x - x_1}{\alpha} = \frac{y - ax_1}{\beta} = \rho,$$

$\rho$ représentant la distance du point A au point variable dont les coordonnées sont $x$ et $y$.

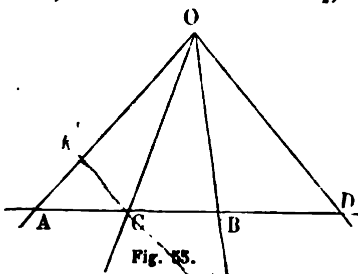


Fig. 55.

La distance du point A au point B, par exemple, sera donnée par l'équation

$$ax_1 + \beta\rho_1 = bx_1 + b\alpha\rho_1;$$

d'où

$$\rho_1 = -\frac{(a-b)x_1}{\beta - b\alpha}$$

On a de même pour exprimer les distances du point A aux points C et D les équations

$$\rho_2 = -\frac{(a-c)x_1}{\beta - c\alpha} \qquad \rho_3 = -\frac{(a-d)x_1}{\beta - d\alpha};$$

or

$$\lambda = \frac{\rho_2}{\rho_3} \cdot \frac{\rho_3 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}.$$

En remplaçant $\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ par leurs valeurs, on obtient

$$\lambda = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{(a-b)(\beta - d\alpha) - (a-d)(\beta - b\alpha)}{(a-b)(\beta - c\alpha) - (a-c)(\beta - b\alpha)};$$

en réduisant, on voit facilement que le facteur $\beta - a\alpha$ est commun aux deux termes de la fraction; après la suppression de ce facteur, il reste

$$\lambda = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{d-b}{c-b},$$

quantité indépendante de la position de la sécante.

**Définition.** — On appelle rapport anharmonique d'un faisceau de quatre droites le rapport anharmonique des quatre points d'intersection du faisceau par une transversale quelconque.

### RAPPORT HARMONIQUE.

**62.** Quatre points $a$, $b$, $c$, $d$ situés en ligne droite forment une division harmonique quand l'un de leurs rapports anharmoniques est égal à $-1$.

Ainsi les quatre points forment une division harmonique si l'on a

$$\frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = -1.$$

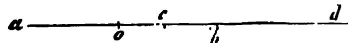


Fig. 56.

Les deux points $c$ et $d$ sont dits conjugués harmoniques par rapport aux deux points $a$ et $b$.

De la relation précédente on tire

$$\frac{ac}{cb} = \frac{ad}{bd};$$

donc les deux points $c$ et $d$ divisent le segment $ab$ dans le même rapport.

Si le point $c$ est situé sur le segment $ab$, le point $d$ est en dehors de ce segment; supposons le point $d$ situé sur le segment $ab$ prolongé à partir de $b$, alors $ad$ surpasse $bd$; par suite $ac$ surpasse également $cb$ : il résulte de là que le milieu $o$ du segment $ab$ n'est pas situé entre les deux points conjugués $c$ et $d$.

Quand le point $d$ s'éloigne à l'infini, le rapport $\frac{ad}{bd}$ tend vers l'unité et le point $c$ tend vers le point $o$ milieu du segment $ab$.

Dans la relation (32), introduisons les distances des points $b$ et $d$ au point $a$, elle devient

$$\frac{ac}{ab - ac} = \frac{ad}{ad - ab},$$

ou bien

$$\frac{2}{ab} = \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad}.$$

Dans la relation (32), introduisons les distances des points $a$, $b$, $c$, $d$ au point $o$ milieu de $ab$, elle devient

$$\frac{oa + oc}{oa - oc} = \frac{oa + od}{od - oa};$$

d'où

$$\frac{2\,oa}{2\,oc} = \frac{2\,od}{2\,oa},$$

c'est-à-dire

$$\overline{oa}^2 = oc\,.\,od.$$

En résumé, on peut exprimer que quatre points forment une division harmonique à l'aide de l'une quelconque des relations suivantes :

$$\frac{ac}{cb} = \frac{ad}{bd} \qquad \frac{2}{ab} = \frac{1}{ac} + \frac{1}{ad} \qquad \overline{oa}^2 = oc.\,od.$$

PROBLÈME.

**63.** *Connaissant les coordonnées de quatre points situés en ligne droite, exprimer que ces quatre points forment une division harmonique.*

Soient $a_1(x_1, y_1)$ $a_2(x_2, y_2)$ $a_3(x_3, y_3)$ $a_4(x_4, y_4)$ les quatre

points donnés, les points conjugués étant $(a_1, a_2)$ d'une part et $(a_3, a_4)$ d'autre part.

Représentons par $\frac{\mu}{\lambda}$ le rapport suivant lequel le point $a_3$ partage le segment $a_1 a_2$; le même rapport pour le point $a_4$ sera $-\frac{\mu}{\lambda}$; on aura donc

$$x_3 = \frac{\lambda x_1 + \mu x_2}{\lambda + \mu} \qquad x_4 = \frac{\lambda x_1 - \mu x_2}{\lambda - \mu};$$

en éliminant le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$ entre les deux équations précédentes, on obtient la relation

$$x_1 x_2 + x_3 x_4 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)(x_3 + x_4);$$

les ordonnées des quatre points sont liées par une relation analogue.

### FAISCEAU HARMONIQUE.

Quand dans un faisceau de quatre droites concourantes l'un des rapports anharmoniques est égal à $-1$, on dit que le faisceau est harmonique.

#### PROBLÈME.

*Connaissant les équations de quatre droites concourantes, exprimer que ces droites forment un faisceau harmonique.*

Nous avons trouvé (61) l'expression

$$\lambda = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{d-b}{c-b}$$

pour le rapport anharmonique de quatre droites concourantes ayant pour équations

$$y = ax \quad y = bx \quad y = cx \quad y = dx.$$

En écrivant que ce rapport est égal à $-1$, on exprimera que les quatre droites forment un faisceau harmonique. On obtient ainsi la relation

$$\frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{d-b}{c-b} = -1,$$

à laquelle on peut donner la forme suivante:

$$ab + cd = \frac{1}{2}(a+b)(c+d).$$

**Remarque.** — La première de ces relations peut être écrite comme il suit :

$$\frac{a-c}{\frac{a}{d}-1}\cdot\frac{1-\frac{b}{d}}{c-b}+1=0;$$

si l'on fait coïncider la droite C avec l'axe des $x$ et la droite D avec l'axe des $y$, on a

$$c=0 \quad d=\infty,$$

et la relation précédente devient

$$a+b=0.$$

Donc, pour que deux droites passant par l'origine soient conjuguées harmoniques par rapport aux axes de coordonnées, il faut et il suffit que leurs coefficients angulaires soient égaux et de signes contraires.

## POLAIRE D'UN POINT PAR RAPPORT A DEUX DROITES.

### THÉORÈME.

**64.** *Par un point donné p on mène une sécante quelconque qui rencontre en a et a' deux droites données* A, A' ; *le point p' conjugué harmonique de p par rapport aux points a et a' décrit une droite passant par le sommet de l'angle* AOA'.

Soient

$$y-ax=0 \quad y-a'x=0$$

les équations des deux droites A, A', leur point de rencontre étant pris pour origine, et $x_1, y_1$ les coordonnées du point $p$.

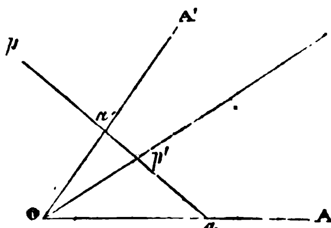


Fig. 57.

Si nous appelons $x, y$ les coordonnées du point $p'$, celles d'un point quelconque de la droite $pp'$ auront pour expression

$$\alpha=\frac{\lambda x+\mu x_1}{\lambda+\mu} \qquad \beta=\frac{\lambda y+\mu y_1}{\lambda+\mu};$$

en exprimant que ces coordonnées satisfont à l'équation de la

droite A, on a, pour déterminer la valeur du rapport $\frac{\mu}{\lambda}$ qui correspond au point $a$, l'équation

$$\frac{\mu}{\lambda}=-\frac{y-ax}{y_1-ax_1};$$

on a de même pour le point $a'$

$$\frac{\mu'}{\lambda'}=-\frac{y-a'x}{y_1-a'x_1}.$$

Les deux points $p$ et $p'$ étant conjugués harmoniques, les deux rapports $\frac{\mu}{\lambda}$, $\frac{\mu'}{\lambda'}$ sont égaux et de signes contraires; donc les coordonnées du point $p'$ satisfont à l'équation

$$\frac{y-ax}{y_1-ax_1}+\frac{y-a'x}{y_1-a'x_1}=0;$$

ce point décrit donc une droite passant par le point O.

Cette droite est appelée la polaire du point P, et le point P est le pôle de la droite $Op'$.

Si l'on désigne par $m$ le coefficient angulaire $\frac{y_1}{x_1}$ de la droite $Op$ et par $m'$ celui de la droite $Op'$, on vérifie facilement que l'on a la relation

$$aa'+mm'=\frac{1}{2}(a+a')(m+m').$$

Les quatre droites OA, OA', $Op$, $Op'$ forment donc un faisceau harmonique.

## PROBLÈMES SUR LA LIGNE DROITE.

### THÉORÈME.

65. *Les trois médianes d'un triangle se coupent en un même point* G.

Nous prendrons pour origine des coordonnées le centre des moyennes distances des trois sommets $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ du triangle; nous aurons

$$x_1+x_2+x_3=0 \quad y_1+y_2+y_3=0.$$

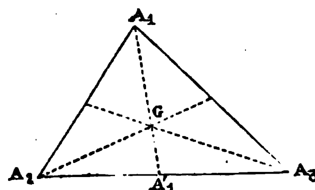


Fig. 58.

Le point $A'_1$ milieu du côté $A_1 A_2$ a pour coordonnées

$$A'_1 \begin{cases} \dfrac{x_2+x_3}{2}=-\dfrac{x_1}{2}; \\ \dfrac{y_2+y_3}{2}=-\dfrac{y_1}{2} \end{cases}$$

l'équation de la médiane $A_1 A'_1$ sera donc

$$\frac{x - x_1}{\frac{x_1}{2} + x_1} = \frac{y - y_1}{\frac{y_1}{2} + y_1},$$

ou

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1};$$

cette médiane passe donc par l'origine, c'est-à-dire par le centre des moyennes distances des sommets du triangle; donc les trois médianes passent par ce point.

THÉORÈME.

**66.** *Les trois hauteurs d'un triangle se coupent en un même point.*

Soient

$$\begin{array}{ll} A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 & A_2 A_3 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 & A_3 A_1 \\ A_3 x + B_3 y + C_3 = 0 & A_1 A_2 \end{array}$$

les équations des trois côtés du triangle $A_1 A_2 A_3$. Pour abréger l'écriture, nous représenterons par X, Y, Z les premiers membres de ces équations.

L'équation générale des droites passant par le point $A_1$ est

$$Y + \lambda Z = 0,$$

ou, en ordonnant,

$$(A_2 + \lambda A_3)x + (B_2 + \lambda B_3)y + C_2 + \lambda C_3 = 0;$$

la relation qui exprime que cette droite est perpendiculaire sur le côté $A_2 A_3$ est, en supposant les axes rectangulaires,

$$\frac{A_1}{B_1} \cdot \frac{A_2 + \lambda A_3}{B_2 + \lambda B_3} + 1 = 0;$$

on en tire

$$\lambda = -\frac{A_2 A_1 + B_2 B_1}{A_1 A_3 + B_1 B_3};$$

par suite, l'équation de la hauteur issue du sommet $A_1$ est

$$(A_1 A_3 + B_1 B_3) Y - (A_2 A_1 + B_2 B_1) Z = 0.$$

En résumé, les équations des trois hauteurs du triangle sont

$$\begin{aligned}(A_1A_3+B_1B_3)Y-(A_2A_1+B_2B_1)Z=0\\(A_2A_1+B_2B_1)Z-(A_3A_2+B_3B_2)X=0\\(A_3A_2+B_3B_2)X-(A_1A_3+B_1B_3)Y=0.\end{aligned}$$

En ajoutant ces trois équations, on obtient une identité ; donc les trois hauteurs concourent.

THÉORÈME.

**67.** *Les perpendiculaires élevées sur les côtés d'un triangle par leur milieu se coupent en un même point* H'.

Prenons pour origine des coordonnées *rectangulaires* le centre des moyennes distances des trois sommets $A_1(x_1, y_1)A_2(x_2, y_2)$ $A_3(x_3, y_3)$ du triangle; les coordonnées des milieux des trois côtés seront

$$\frac{x_2+x_3}{2}=-\frac{x_1}{2}\quad\frac{x_3+x_1}{2}=-\frac{x_2}{2}\quad\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{x_3}{2}$$

$$\frac{y_2+y_3}{2}=-\frac{y_1}{2}\quad\frac{y_3+y_1}{2}=-\frac{y_2}{2}\quad\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{y_3}{2},$$

et les trois perpendiculaires auront pour équation

$$(33)\quad\begin{cases}y(y_3-y_2)+x(x_3-x_2)=-\frac{y_1}{2}(y_3-y_2)-\frac{x_1}{2}(x_3-x_2)\\y(y_1-y_3)+x(x_1-x_3)=-\frac{y_2}{2}(y_1-y_3)-\frac{x_2}{2}(x_1-x_3)\\y(y_2-y_1)+x(x_2-x_1)=-\frac{y_3}{2}(y_2-y_1)-\frac{x_3}{2}(x_2-x_1).\end{cases}$$

En ajoutant ces trois équations, on obtient une identité; donc les trois perpendiculaires concourent en un point H'.

THÉORÈME.

**68.** 1° *Dans un triangle, le centre de gravité* G, *le point de concours* H *des hauteurs, le centre* H' *du cercle circonscrit sont en ligne droite.*

2° *Le point* G *est situé entre les points* H *et* H'; *de plus, on a*

$$GH=2GH'.$$

Conservons les notations du problème précédent; prenons

encore pour origine le centre de gravité G et pour axe des $x$ la droite GH'.

Les perpendiculaires élevées sur les côtés du triangle en leur milieu coupant l'axe des $x$ au même point H', les équations (33) doivent donner pour $x$ la même valeur quand on y fait $y=0$. Comme ces droites concourent, il suffira de considérer les deux premières des équations (33).

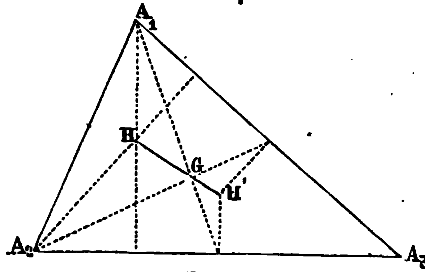


Fig. 59.

En appelant $\alpha'$ l'abscisse du point H', on aura

$$(33') \qquad \alpha' = -\frac{1}{2}\frac{y_1(y_3-y_2)+x_1(x_3-x_2)}{x_3-x_2} = -\frac{1}{2}\frac{y_2(y_1-y_3)+x_2(x_1-x_3)}{x_1-x_3}.$$

Maintenant, les hauteurs du triangle issues des sommets $A_1$, $A_2$ ont pour équations

$$y(y_3-y_2)+x(x_3-x_2)=y_1(y_3-y_2)+x_1(x_3-x_2)$$
$$y(y_1-y_3)+x(x_1-x_3)=y_2(y_1-y_3)+x_2(x_1-x_3);$$

ces droites rencontrent l'axe des $x$ en des points ayant pour abscisses

$$x=\frac{y_1(y_3-y_2)+x_1(x_3-x_2)}{x_3-x_2}$$
$$x'=\frac{y_2(y_1-y_3)+x_2(x_1-x_3)}{x_1-x_3}$$

L'équation (33') nous montre que $x$ est égal à $x'$; donc le point de concours H des hauteurs se trouve sur la droite GH'.

Si l'on appelle $\alpha$ l'abscisse du point H, on voit que l'on a

$$\alpha = -2\alpha';$$

par conséquent le point G est situé entre les points H et H', et l'on a, en outre,

$$GH = 2GH'.$$

## QUADRILATÈRE COMPLET.

On appelle quadrilatère complet la figure formée par un système de quatre droites.

Les quatre droites associées deux à deux se coupent en six points qui sont les sommets du quadrilatère.

Deux sommets non situés sur un même côté sont dits opposés.

Les droites qui joignent les sommets opposés sont les diagonales ; il y a trois diagonales.

### THÉORÈME.

**69.** ***Dans tout quadrilatère complet, chaque diagonale est divisée harmoniquement par les deux autres.***

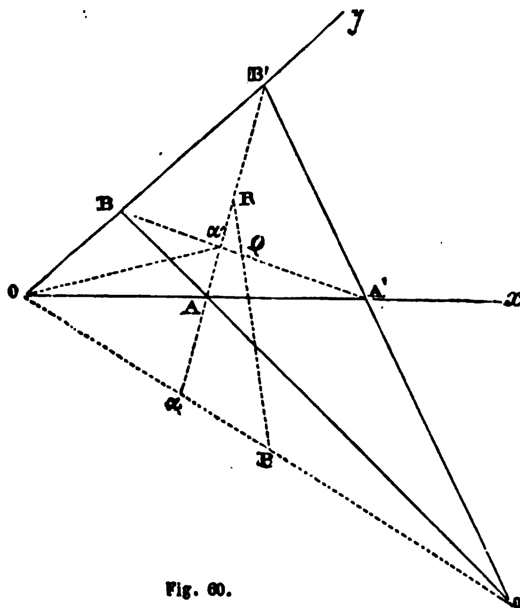



Fig. 60.

Démontrons, par exemple, que dans le quadrilatère complet ayant pour sommets les points O,O', A,B', B,A' les diagonales OO', BA' partagent harmoniquement le segment AB'.

Pour cela, il suffit de faire voir que les droites OO', Oα', $Ox$, $Oy$ forment un faisceau harmonique.

Prenons pour axes de coordonnées les côtés OA, OB du quadrilatère, et désignons par $a$, $a'$ les abscisses des sommets A et A', par $b$ et $b'$ les ordonnées des sommets B et B'.

Les équations des côtés AB, A'B' seront

$$(34) \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0 \quad \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}-1=0,$$

et celles des diagonales A'B, AB' seront

$$(35) \qquad \frac{x}{a'}+\frac{y}{b}-1=0 \qquad \frac{x}{a}+\frac{y}{b'}-1=0.$$

On obtiendra les équations des droites OO' et O$\alpha'$ en formant une combinaison homogène des équations (34), puis une combinaison des équations (35), ce qui donne les deux équations

$$x\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}\right)+y\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}\right)=0 \qquad x\left(\frac{1}{a'}-\frac{1}{a}\right)+y\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b'}\right)=0,$$

Les coefficients angulaires des droites représentées par ces équations sont égaux et de signes contraires ; par conséquent les droites OO', O$\alpha'$ forment avec les droites O$x$, O$y$ un faisceau harmonique.

THÉORÈME.

70. *Dans tout quadrilatère complet, les milieux des trois diagonales sont en ligne droite.*

En résolvant les équations (34), on obtient les coordonnées du point O'

$$x=\frac{aa'(b'-b)}{ab'-ba'} \qquad y=\frac{bb'(a-a')}{ab'-ba'},$$

et l'on trouve facilement que les coordonnées des points P, Q, R milieux des trois diagonales ont pour expressions

$$\text{P}\begin{cases}\dfrac{aa'(b'-b)}{2(ab'-ba')}\\[2mm] \dfrac{bb'(a-a')}{2(ab'-ba')}\end{cases} \qquad \text{Q}\begin{cases}\dfrac{a'}{2}\\[2mm] \dfrac{b}{2}\end{cases} \qquad \text{R}\begin{cases}\dfrac{a}{2}\\[2mm] \dfrac{b'}{2}\end{cases}$$

Pour vérifier que les trois points P, Q, R sont en ligne droite, formons les coefficients angulaires $m$ et $m'$ des droites QR et PQ; on a

$$m=\frac{b'-b}{a-a'} \qquad m'=\frac{b}{a'}\,\frac{ab'-ba'-b'(a-a')}{ab'-ba'-a(b'-b)}=\frac{b'-b}{a-a'};$$

les deux coefficients angulaires $m$ et $m'$ étant égaux, les droites QR et PQ coïncident.

THÉORÈME.

71. *Les trois sommets d'un triangle* ABC *glissent sur trois droites concourantes; deux de ses côtés* AC, BC *passent par deux points*

*fixes* $P(x_1, y_1)$, $R(x_2, y_2)$ ; *démontrer que le troisième côté* AB *passe par un point fixe.*

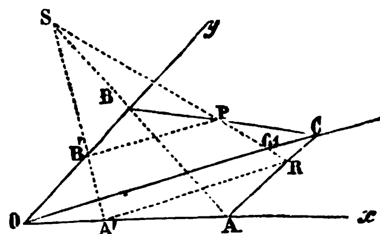


Fig. 61.

Prenons pour axes de coordonnées les droites OA, OB, et soit

$$y = mx$$

l'équation de la droite OC; si l'on désigne par $\alpha$ l'abscisse variable du point C, son ordonnée sera $m\alpha$.

Les droites AC, BC ont pour équations

$$\frac{x - x_2}{\alpha - x_2} = \frac{y - y_2}{m\alpha - y_2} \qquad \frac{x - x_1}{\alpha - x_1} = \frac{y - y_1}{m\alpha - y_1};$$

en faisant $y = 0$ dans la première de ces deux équations et $x = 0$ dans la seconde, on obtiendra l'abscisse du point A et l'ordonnée du point B :

$$x = \frac{y_2 - mx_2}{y_2 - m\alpha}\alpha \qquad y = \frac{y_1 - mx_1}{\alpha - x_1}\alpha.$$

L'équation de la droite AB sera donc

$$\frac{x}{\alpha}\frac{y_2 - m\alpha}{y_2 - mx_2} + \frac{y}{\alpha}\frac{\alpha - x_1}{y_1 - mx_1} - 1 = 0,$$

ou bien

$$(36) \qquad \begin{aligned} &\frac{1}{\alpha}\left(\frac{y_2}{y_2 - mx_2}x - \frac{x_1}{y_1 - mx_1}y\right) \\ &+\left(\frac{-m}{y_2 - mx_2}x + \frac{1}{y_1 - mx_1}y - 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Cette équation ne contient qu'un seul paramètre variable $\frac{1}{\alpha}$ au premier degré; donc la droite AB qu'elle représente passe par un point fixe S.

Les coordonnées du point S sont définies par les équations

$$\frac{-m}{y_2 - mx_2}x + \frac{1}{y_1 - mx_1}y - 1 = 0$$

$$\frac{y_2}{y_2 - mx_2}x - \frac{x_1}{y_1 - mx_1}y = 0.$$

La première de ces équations s'obtient en faisant $\alpha = \infty$ dans l'équation (36) ; elle correspond au cas où le point C s'éloigne à l'infini sur la droite OC; la position que prend alors la droite AB est facile à construire, car les côtés BC, AC du triangle mobile coïncident alors avec les parallèles RA′, PB′ menées par les points R et P à la droite OC.

La seconde équation s'obtient en faisant $\alpha = 0$ dans l'équation (36); elle correspond au cas où le point C coïncide avec l'origine.

On pourrait construire la position que prend alors la droite AB; mais, pour avoir une seconde droite passant par le point S, il vaut mieux remarquer que quand le point C coïncide avec le point $C_1$ intersection des droites PR et OC, le côté AB coïncide lui-même avec PR. Le point S se trouve donc à l'intersection des droites PR et A′B′.

## EXERCICES.

1. Le sommet d'un triangle, le point de concours des bissectrices intérieures et le point de concours des bissectrices des angles extérieurs adjacents à la base sont en ligne droite.

2. Si deux triangles sont tels, que les perpendiculaires abaissées des sommets du premier sur les côtés du second se coupent en un même point; réciproquement, les perpendiculaires abaissées des sommets du second sur les côtés du premier se couperont en un même point.

3. Si, par les sommets d'un triangle, on mène trois droites se coupant en un même point, les symétriques de ces droites, par rapport aux bissectrices des angles correspondant à ces sommets se couperont aussi en un même point.

4. Sur deux droites rectangulaires $ox$, $oy$ on construit un rectangle variable ayant un périmètre donné $2a$; la perpendiculaire abaissée du sommet C sur la diagonale AB passe par un point fixe.

5. Les polaires d'un même point relatives aux trois angles d'un triangle vont rencontrer, respectivement, les côtés opposés en trois points situés en ligne droite.

6. Les polaires d'un point relatives à deux angles d'un triangle se coupent sur la droite qui joint ce point au sommet du troisième angle.

7. Si d'un point on conduit des rayons aux trois sommets d'un triangle, les droites menées par le même point perpendiculairement à ces rayons, iront rencontrer les côtés opposés en trois points situés en ligne droite.

8. Si, des sommets d'un triangle, on abaisse sur les côtés opposés des obliques sous des angles ayant leurs bissectrices parallèles à une même droite, les trois obliques passeront par un même point.

9. Étant pris un point dans le plan d'un triangle, si l'on mène les bissectrices des angles sous lesquels on voit de ce point les trois côtés du triangle, et les bissectrices des suppléments de ces angles :

1° Les trois bissectrices des suppléments rencontreront les côtés opposés, respectivement, en trois points situés en ligne droite.

2° Les bissectrices de deux des trois angles et la bissectrice du supplément du troisième, rencontreront aussi les trois côtés opposés respectivement, en trois points situés en ligne droite.

10. Étant donnés un triangle et un point O, les trois points situés respectivement sur chaque côté, et tels que les segments joignant ces points aux sommets opposés sont vus du point O sous un angle droit, sont en ligne droite.

11. Les trois sommets d'un triangle ABC glissent sur trois droites fixes non concourantes; deux de ses côtés AC, BC passent par deux points fixes P, R; comment doivent être placés les deux points P et R pour que le côté AB passe lui-même par un point fixe.

12. Quand deux côtés opposés d'un quadrilatère sont rectangulaires ainsi que les deux diagonales, les deux autres côtés opposés sont aussi rectangulaires.

13. Condition pour que les droites représentées par les équations

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy = 0 \qquad A'x^2 + C'y^2 + 2B'xy = 0$$

forment un faisceau harmonique, les droites conjuguées étant représentées par la même équation.

14. Condition pour que les droites représentées par la seconde équation partagent en deux parties égales les angles formés par les droites que représente la première équation.

15. Deux triangles ABC, A'B'C' sont tels, que les droites AA', BB', CC' concourent en un même point; démontrer que les points de rencontre des côtés (AB, A'B'), (BC, B'C'), (CA, C'A') sont en ligne droite

# CHAPITRE II

## CIRCONFÉRENCE.

### ÉQUATION DE LA CIRCONFÉRENCE EN COORDONNÉES OBLIQUES.

**72.** La circonférence est une ligne plane dont tous les points sont également distants d'un point appelé centre.

Cette définition conduit immédiatement à l'équation de la circonférence.

Soient $x_0$, $y_0$ les coordonnées du centre, R le rayon de la circonférence, et $x$, $y$ les coordonnées d'un point quelconque de cette circonférence ; son équation sera

$$(1) \quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+2(x-x_0)(y-y_0)\cos\theta - R^2 = 0,$$

ou, en développant,

$$(2) \quad \begin{aligned} x^2+y^2+2xy\cos\theta-2(x_0+y_0\cos\theta)x-2(x_0\cos\theta+y_0)y \\ +x_0^2+y_0^2+2x_0y_0\cos\theta-R^2=0. \end{aligned}$$

Quand la circonférence varie, les coefficients qui changent dans l'équation (2) sont ceux des termes du premier degré, et le terme tout connu. L'équation d'une circonférence est donc de la forme

$$(3) \quad x^2+y^2+2xy\cos\theta+2D_1x+2E_1y+F_1=0,$$

l'angle des axes étant $\theta$.

Réciproquement, toute équation de la forme précédente représente en général une circonférence, pourvu que l'angle des axes soit $\theta$.

En effet, en identifiant les équations (2) et (3), on obtient les trois relations

$$(4) \quad \begin{cases} x_0+y_0\cos\theta+D_1=0 \\ x_0\cos\theta+y_0+E_1=0 \end{cases}$$

$$(5) \quad x_0^2+y_0^2+2x_0y_0\cos\theta-R^2=F_1;$$

ces trois équations contiennent trois inconnues $x_0$, $y_0$ et R ; donc

l'identification des équations (2) et (3) sera en général possible.

Il faut maintenant examiner si les équations (4) et (5) donneront toujours pour $x_0$, $y_0$, R des valeurs admissibles.

**Équations du centre.** — Les équations (4) qui déterminent le centre de la circonférence sont appelées les *équations du centre;* elles sont toujours compatibles, car le déterminant des inconnues $x_0$, $y_0$ est $\sin^2\theta$, quantité qui n'est pas nulle.

Représentons par $f(x, y)$ le premier membre de l'équation (3); on vérifie sans difficulté que les équations du centre sont

$$f'_{x_0} = 0 \qquad f'_{y_0} = 0.$$

**Règle.** — *Pour former les équations du centre, il suffit d'égaler à zéro les dérivées partielles de l'équation de la circonférence.*

*Détermination du rayon.* — On peut remplacer l'équation (5) par une autre plus simple; pour cela, il suffit d'y ajouter les équations (4) respectivement multipliées par $-x_0$, $-y_0$; on obtient ainsi l'équation

$$D_1 x_0 + E_1 y_0 + F_1 + R^2 = 0.$$

Pour obtenir le rayon, on éliminera $x_0$, $y_0$ entre les équations

$$(6) \qquad \begin{cases} x_0 + y_0 \cos\theta + D_1 = 0 \\ x_0 \cos\theta + y_0 + E_1 = 0 \\ D_1 x_0 + E_1 y_0 + F_1 + R^2 = 0. \end{cases}$$

On sait qu'il faut pour cela égaler à zéro le déterminant *complet* des équations (6), ce qui donne

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & D_1 + 0 \\ \cos\theta & 1 & E_1 + 0 \\ D_1 & E_1 & F_1 + R^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & D_1 \\ \cos\theta & 1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix} + R^2 \sin^2\theta = 0.$$

Si la dernière équation donne pour R une valeur réelle, l'équation (3) représente un véritable cercle.

Si cette équation donne pour R une valeur nulle, l'équation (2) ne sera vérifiée que par les coordonnées du centre C; on dit que la circonférence se réduit à un point.

Enfin si on trouve pour R une valeur imaginaire, l'équation (3) n'est vérifiée par les coordonnées d'aucun point du plan; on dit alors qu'elle représente une circonférence imaginaire.

**Remarque**. — On peut former facilement l'équation

$$D_1 x_0 + E_1 y_0 + F_1 + R^2 = 0.$$

Rendons homogène l'équation (3) en y remplaçant $x$ et $y$ par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$, puis en chassant le dénominateur $z^2$; si nous appelons $\varphi(x, y, z)$ le premier membre de l'équation (3) ainsi modifiée, nous aurons

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta + 2D_1 xz + 2E_1 yz + F_1 z^2,$$

et

$$\frac{1}{2}\varphi'_{z_0} = D_1 x_0 + E_1 y_0 + F_1 z_0;$$

l'équation considérée peut donc être écrite de la manière suivante:

$$\frac{1}{2}\varphi'_{z_0} + R^2 = 0,$$

pourvu que dans l'expression $\varphi'_{z_0}$ on fasse $z_0 = 1$.

Dans la pratique, on n'introduit pas la fonction $\varphi(x, y, z)$, on convient de substituer au symbole $\frac{1}{2}\varphi'_{z_0}$ le symbole $\frac{1}{2}f'_{z_0}$; cette substitution ne présente aucun inconvénient quand on a défini la fonction $\varphi(x, y, z)$.

En résumé, on obtiendra le rayon en égalant à zéro le déterminant des quantités $x, y, z$ dans les équations

$$\frac{1}{2}f'_x = 0 \qquad \frac{1}{2}f'_y = 0 \qquad \frac{1}{2}f'_z + R^2 = 0.$$

**Construction du centre**. — Dans les équations (4) regardons $x_0$ et $y_0$ comme des coordonnées courantes; ces équations représenteront deux droites passant par le centre.

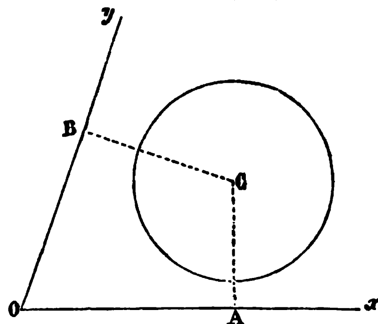


Fig. 62.

La première est perpendiculaire sur l'axe des $x$ et le rencontre en un point A ayant pour abscisse $-D_1$; la seconde est perpendiculaire sur l'axe des $y$, et le rencontre en un point B ayant pour ordonnée $-E_1$. De là résulte la construction suivante;

*On prendra sur l'axe des $x$ un point* A *ayant pour abscisse la moitié du coefficient de $x$ dans l'équation* (3) *pris en signe contraire, et sur l'axe des $y$ un point* B *ayant pour ordonnée la moitié du coefficient de $y$ pris en signe contraire.*

*Les perpendiculaires menées par le point* A *à l'axe des $x$, par le point* B *à l'axe des $y$ se couperont au centre* C *de la circonférence.*

**CONDITIONS POUR QUE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU SECOND DEGRÉ REPRÉSENTE UNE CIRCONFÉRENCE.**

**73.** L'équation générale du second degré à deux variables est

$$Ax^2+Cy^2+2Bxy+2Dx+2Ey+F=0\,;$$

pour qu'elle représente une circonférence, il faut qu'on puisse l'identifier avec l'équation (3) ; les relations d'identification sont

$$(7)\qquad A=C=\frac{B}{\cos\theta}=\frac{D}{D_1}=\frac{E}{E_1}=\frac{F}{F_1};$$

Ces relations au nombre de cinq contiennent trois indéterminées $D_1$, $E_1$, $F_1$, et l'on aura les *deux* relations qui doivent lier les coefficients A, B, C, D, E, F, en éliminant les trois indéterminées entre les équations (7). Cette élimination est toute faite, car les trois premières fractions, dans les équations (7), ne contiennent pas $D_1$, $E_1$, $F_1$.

Les conditions cherchées sont donc

$$A=C=\frac{B}{\cos\theta}.$$

THÉORÈME.

*Pour que l'équation du second degré à deux variables représente une circonférence, il faut et il suffit :*

1° *Que les coefficients des carrés $x^2$ et $y^2$ soient égaux.*

2° *Qu'après avoir divisé l'équation par ces coefficients égaux, le coefficient du rectangle $xy$ soit égal à* $2\cos\theta$.

**ÉQUATION DU CERCLE EN COORDONNÉES RECTANGULAIRES.**

Quand les coordonnées sont rectangulaires, l'équation (1) devient

$$(1')\qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2-R^2=0,$$

et, en développant,

$$(2') \qquad x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-R^2=0\,;$$

cette dernière équation est de la forme

$$(3') \qquad x^2+y^2+2D_1x+2E_1y+F_1=0.$$

**Équations du centre.** — En représentant par $f(x, y)$ le premier membre de l'équation (3'), les équations du centre sont

$$(4') \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}f'_{x_0}=x_0+D_1=0. \\ \frac{1}{2}f'_{y_0}=y_0+E_1=0. \end{cases}$$

**Remarque.** — Quand les axes de coordonnées sont rectangulaires, et que les coefficients des termes en $x^2$ et en $y^2$ sont égaux à l'unité, on obtient les coordonnées du centre en prenant avec un signe contraire la moitié des coefficients des termes du premier degré dans l'équation de la circonférence.

**Rayon.** — Pour avoir le rayon, il suffit de remplacer $x_0$ et $y_0$ par leurs valeurs tirées des équations (4'), dans l'équation

$$\frac{1}{2}f_{z_0}+R^2=D_1x_0+E_1y_0+F_1+R^2=0.$$

L'équation qui donne le carré du rayon est donc

$$R^2=D_1^2+E_1^2-F_1.$$

**Conditions pour que l'équation générale du second degré représente une circonférence, les axes des coordonnées étant rectangulaires.**

**74.** En identifiant l'équation générale du second degré avec l'équation (3'), on obtient les relations suivantes :

$$\frac{A}{1}=\frac{C}{1}=\frac{B}{0}=\frac{D}{D_1}=\frac{E}{E_1}=\frac{F}{F_1}.$$

Les conditions cherchées sont donc

$$A=C \qquad B=0.$$

THÉORÈME.

*Pour que l'équation du second degré à deux variables représente une circonférence, les axes de coordonnées étant rectangulaires il faut et il suffit :*

1° *Que les coefficients des carrés $x^2$ et $y^2$ soient égaux.*

2° *Que le terme en xy manque dans l'équation.*

## ÉQUATION DE LA CIRCONFÉRENCE RAPPORTÉE A DIVERS AXES PARTICULIERS.

**75.** 1° *Le centre est à l'origine.* — L'équation de la circonférence est

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - R^2 = 0$$

en coordonnées obliques, et

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

quand les coordonnées sont rectangulaires.

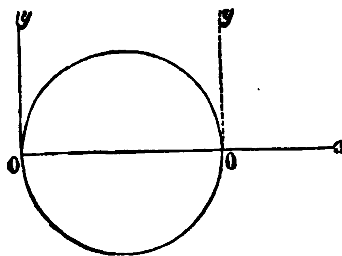


Fig. 63.

2° *L'axe des x est un diamètre, l'axe des y une tangente à l'extrémité de ce diamètre.*

Les coordonnées du centre sont ($\pm$R et 0) ; par suite, l'équation de la circonférence est

$$(x \mp R)^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

ou bien

$$x^2 + y^2 \mp 2Rx = 0,$$

## ÉQUATION DE LA TANGENTE A LA CIRCONFÉRENCE.

**Définition.** — On appelle tangente en un point A d'une courbe la limite des positions que prend une sécante qui tourne autour du point A, jusqu'à ce qu'un second point d'intersection vienne se confondre avec A.

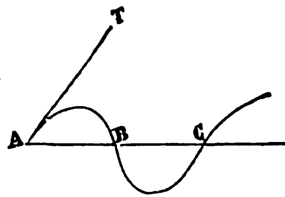


Fig. 64.

Une droite rencontrant une circonférence en deux points, on exprimera qu'une droite touche une circonférence au point A, en écrivant

qu'elle rencontre la courbe en deux points confondus avec A.

Soient $(x_1, y_1)$ les coordonnées du point A, et $(x, y)$ celles d'un point quelconque M de la sécante AB; on sait que les coordonnées $\alpha, \beta$ du point B où la sécante rencontre une seconde fois la circonférence peuvent être représentées par les formules

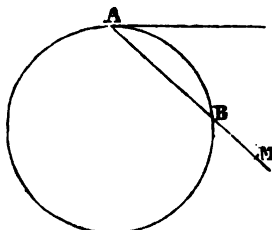


Fig. 65.

$$\alpha = \frac{\lambda x_1 + \mu x}{\lambda + \mu} \qquad \beta = \frac{\lambda y_1 + \mu y}{\lambda + \mu};$$

ces formules rendues homogènes deviennent

$$\frac{\alpha}{\lambda x_1 + \mu x} = \frac{\beta}{\lambda y_1 + \mu y} = \frac{\gamma}{\lambda z_1 + \mu z},$$

pourvu que l'on convienne de faire $z = z_1 = \gamma = 1$ dans les résultats que nous allons obtenir.

Cela posé, soit

$$(8) \qquad f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la circonférence, rendue homogène.

On obtiendra les coordonnées du point B en remplaçant dans l'équation (8) $x$, $y$ et $z$ par les quantités $\lambda x_1 + \mu x$, $\lambda y_1 + \mu y$, $\lambda z_1 + \mu z$, auxquelles elles sont respectivement proportionnelles et faisant ensuite $z = z_1 = \gamma = 1$ dans l'équation

$$f(\lambda x_1 + \mu x, \quad \lambda y_1 + \mu y, \quad \lambda z_1 + \mu z) = 0$$

ainsi obtenue.

D'après ce qui a été vu en Algèbre, l'équation précédente développée est

$$(9) \quad \lambda^2 f(x_1, y_1, z_1) + \lambda\mu (x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1}) + \mu^2 f(x, y, z) = 0.$$

Les racines de l'équation (9) sont les valeurs du rapport $\frac{\mu}{\lambda}$ qui correspondent aux points d'intersection de la droite AB avec la circonférence.

Pour que les deux points d'intersection se confondent avec le point A, il faut et il suffit que l'équation (9) donne pour $\frac{\mu}{\lambda}$ deux

valeurs nulles. Or, puisque le point $A(x_1, y_1)$ est sur la circonférence, le coefficient de $\lambda^2$ est nul quand on y fait $z_1 = 1$; l'une des racines de l'équation (9) résolue par rapport à $\frac{\mu}{\lambda}$ est donc nulle; pour que la seconde racine soit nulle, il faut et il suffit que l'on ait la relation

$$x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} = 0.$$

Si dans cette équation on fait $z = z_1 = 1$, elle représente une droite coupant la circonférence en deux points confondus avec le point A; elle représente donc la tangente AT.

PROBLÈME.

**76.** *Par un point donné* $P(x_0, y_0)$, *mener une tangente à une circonférence.*

Prenons pour inconnues les coordonnées $x, y$ du point de contact; en représentant par X, Y les coordonnées courantes, l'équation de la tangente sera

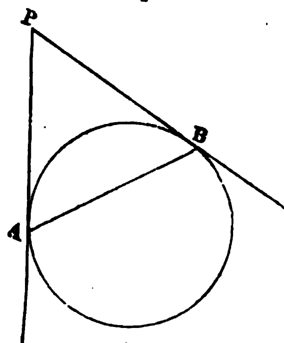


Fig. 66.

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0.$$

Si l'on exprime que cette droite passe par le point P, on a, comme relation de condition,

$$(10) \qquad x_0 f'_x + y_0 f'_y + z_0 f'_z = 0,$$

où l'on doit toujours faire $z = z_0 = 1$. Cette équation, jointe à l'équation de la circonférence, détermine les inconnues $x$ et $y$.

**77. Corde de contact.** — La fonction $f(x, y, z)$ étant du *second degré*, on vérifie facilement que l'équation (10) peut être écrite de la manière suivante :

$$(10') \qquad x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = 0.$$

Dans cette équation, faisons $z = z_0 = 1$, et regardons $x$ et $y$ comme des coordonnées *courantes*; elle représentera une droite passant par les points de contact des tangentes issues du point P, puisque l'équation (10') est satisfaite par les coordonnées de

ces points de contact. Les points de contact inconnus seront donc les points d'intersection de cette droite avec la circonférence, et l'on voit que du point P on peut mener à la circonférence deux tangentes qui peuvent être réelles, confondues ou imaginaires.

La droite représentée par l'équation (10') passant par les deux points de contact A et B est la corde de contact des tangentes issues du point P.

**78.** Nous allons maintenant supposer la circonférence rapportée à deux diamètres rectangulaires; son équation rendue homogène est

$$x^2 + y^2 - R^2z^2 = 0.$$

L'équation de la tangente en fonction des coordonnées du point de contact sera

$$xx_1 + yy_1 - R^2 = 0.$$

**Équation de la tangente en fonction du coefficient angulaire.** — Soit

$$y = mx + r$$

l'équation d'une droite; la circonférence étant toujours rapportée à deux diamètres rectangulaires, les abscisses des points où la droite rencontre la circonférence seront données par l'équation

$$x^2 + (mx + r)^2 - R^2 = 0,$$

ou, en développant, par l'équation

$$(1 + m^2)x^2 + 2\,mrx + r^2 - R^2 = 0.$$

On exprimera que la droite est une tangente en écrivant que les racines de l'équation précédente sont égales, ce qui donne la relation de condition

$$r = R\sqrt{1 + m^2}.$$

L'équation de la tangente à la circonférence en fonction du coefficient angulaire est donc

$$y = mx \pm R\sqrt{1 + m^2}.$$

**Autre forme de l'équation de la tangente.** — Lorsque l'on fait varier $\alpha$, toutes les droites représentées par l'équation

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - R = 0,$$

restent à une distance R de l'origine; elles sont donc tangentes à la circonférence qui a pour équation

$$x^2+y^2-R^2=0.$$

### Équation quadratique des tangentes menées d'un point à une circonférence.

**79.** On appelle ainsi l'équation du second degré qui représente les deux tangentes menées par un point donné $P(x_0, y_0)$ à une circonférence.

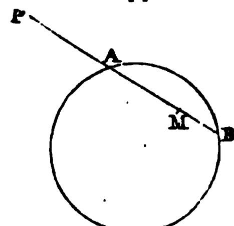


Fig. 67.

Représentons par

$$f(x,y,z)=0$$

l'équation de la circonférence, rendue homogène; par $x$ et $y$ les coordonnées d'un point quelconque M d'une sécante passant par le point P. Pour avoir les coordonnées des points A et B, où cette sécante rencontre la circonférence, il faudra résoudre par rapport à $\frac{\mu}{\lambda}$ l'équation.

$$\lambda^2 f(x_0,y_0,z_0)+\lambda\mu(xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0})+\mu^2 f(x,y,z)=0,$$

puis substituer les valeurs obtenues dans les formules

$$\alpha=\frac{\lambda x_0+\mu x}{\lambda+\mu}\qquad \beta=\frac{\lambda y_0+\mu y}{\lambda+\mu},$$

après avoir fait $z=z_0=1$. La sécante deviendra une tangente si les deux valeurs de $\frac{\mu}{\lambda}$ sont égales, c'est-à-dire si l'on a

$$4f(x,y,z)f(x_0,y_0,z_0)=(xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0})^2.$$

Quand on fait $z=z_0=1$, l'équation précédente qui est du second degré est satisfaite par les coordonnées d'un point quelconque des tangentes issues du point P; elle est donc l'équation de ces deux tangentes.

## POLE ET POLAIRE.

#### THÉORÈME.

**80.** *Par un point donné p $(x_0, y_0)$ on mène une sécante quelconque qui rencontre en a et a' une circonférence donnée, le point p' con-*

*jugué harmonique de p par rapport aux points a, a' décrit une droite.*

Soient

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation rendue homogène de la circonférence, et $x$, $y$ les coordonnées du point $p'$. Pour avoir les coordonnées des points $a$, $a'$ où la sécante $pp'$ rencontre la circonférence, il faudra résoudre par rapport à $\frac{\mu}{\lambda}$ l'équation.

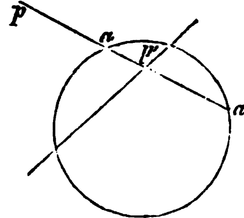



Fig. 63.

$$\lambda^2 f(x_0, y_0, z_0) + \lambda\mu\,(x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0}) + \mu^2 f(x, y, z) = 0.$$

Pour que les deux points $p$ et $p'$ soient conjugués harmoniques par rapport aux points $a$ et $a'$, il faut et il suffit que l'équation précédente donne pour $\frac{\mu}{\lambda}$ deux valeurs égales et de signes contraires : les coordonnées du point $p'$ satisfont donc à l'équation

$$x f'_{x_0} + y f'_{y_0} + z f'_{z_0} = 0,$$

dans laquelle on fait $z = z_0 = 1$ ; or cette équation représente une droite.

Cette droite est appelée la polaire du point $p$, et le point $p$ est dit le pôle de la droite.

**Remarque.** — Quand le point $p$ est extérieur à la circonférence, sa polaire coïncide avec la corde de contact des tangentes issues du point $p$.

Pour expliquer ce résultat, il suffit de remarquer que, les points $a$ et $a'$ venant à coïncider, le point $p'$ situé sur le segment $aa'$ coïncide avec eux.

## AXE RADICAL. — CENTRE RADICAL.

### THÉORÈME.

**81.** *Si par un point* P $(x_0, y_0)$ *on mène une sécante rencontrant une circonférence aux points* A *et* B, *le produit* PA $\times$ PB *reste constant quand la sécante pivote autour du point* P.

Nous commencerons par donner une relation dont nous ferons fréquemment usage.

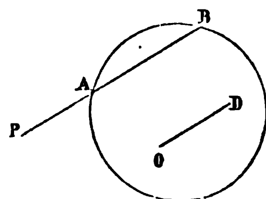


Fig. 69.

Soit $f(x,y)$ une fonction du second degré à deux variables, en développant la fonction

$$f(x_0+\rho\alpha, y_0+\rho\beta)$$

d'après une règle établie en Algèbre, on a

$$f(x_0+\rho\alpha, y_0+\rho\beta)=\rho^2\varphi(\alpha,\beta)+\rho(\alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0})+f(x_0,y_0),$$

en représentant par $\varphi(x,y)$ l'ensemble des termes du second degré dans la fonction $f(x,y)$.

Cela posé, menons par l'origine des coordonnées une parallèle $o$D à la sécante PAB, et, sur cette parallèle, prenons une longueur $o$D égale à l'unité; si $\alpha, \beta$ sont les coordonnées du point D, celles d'un point quelconque $M(x,y)$ de la sécante seront données par les relations

$$x=x_0+\rho\alpha \qquad y=y_0+\rho\beta\,;$$

la valeur absolue de $\rho$ représentant la distance PM.

Soit maintenant

$$f(x,y)=x^2+y^2+2xy\cos\theta+2D_1x+2E_1y+F_1=0$$

l'équation de la circonférence, en y remplaçant $x$ et $y$ par les valeurs précédentes, on obtient l'équation

$$\rho^2(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta)+\rho(\alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0})+f(x_0,y_0)=0,$$

qui se réduit à la forme plus simple

$$(11) \qquad \rho^2+\rho(\alpha f'_{x_0}+\beta f'_{y_0})+f(x_0,y_0)=0,$$

puisque l'on a

$$\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta=\overline{oD}^2=1.$$

Les racines de l'équation (11) représentent les segments PA, PB; donc on a

$$PA\times PB=f(x_0,y_0),$$

valeur indépendante de la direction de la sécante.

**Remarque.** — Les segments PA et PB sont de même signe quand le point P est en dehors de la circonférence; ils sont de

signes contraires quand le point P est intérieur à la circonférence; dans le premier cas le produit PA$\times$PB est positif, dans le second cas il est négatif.

**Définition.** — Le produit constant PA$\times$PB a été appelé par Steiner la puissance du point P par rapport à la circonférence.

Quand le point P est en dehors du cercle, sa puissance est égale au carré de la longueur d'une des tangentes issues de ce point.

THÉORÈME.

**82.** *Les points d'égale puissance par rapport à deux circonférences sont situés sur une droite appelée axe radical des deux circonférences.*

Soient

$$A = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - 2ax - 2a'y + \alpha = 0$$
$$B = x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - 2bx - 2b'y + \beta = 0$$

les équations des deux circonférences dont nous désignerons les premiers membres par A et B.

Les puissances d'un point M du plan par rapport aux deux circonférences ont respectivement pour expressions A et B; ces puissances étant égales par hypothèse, on a la relation

$$A - B = 0,$$

c'est-à-dire

$$2(b-a)x + 2(b'-a')y + \alpha - \beta = 0;$$

or, cette équation représente une droite.

**Règle.** — *On obtient l'équation de l'axe radical de deux circonférences en retranchant membre à membre les équations de ces deux courbes.*

Cette règle suppose que, dans les deux équations, les coefficients des termes du second degré ont été rendus égaux entre eux, ce qui est toujours possible.

THÉORÈME.

**83.** *L'axe radical de deux circonférences coïncide avec la corde qui leur est commune.*

En effet, les coordonnées des points de rencontre des deux circonférences satisfaisant aux deux équations

$$A = 0 \qquad B = 0$$

satisfont également à l'équation

$$A - B = 0.$$

**Remarque.** — En prenant pour axe des $x$ la ligne des centres des deux circonférences, et pour axe des $y$ une perpendiculaire sur cette ligne, l'équation de l'axe radical dans laquelle on doit faire $a' = b' = 0$ devient

$$2(b - a)x + \alpha - \beta = 0.$$

L'axe radical est donc perpendiculaire sur la ligne des centres.

THÉORÈME.

**84.** ***Les axes radicaux de trois circonférences associées deux à deux se coupent en un même point.***

Soient

$$A = 0 \qquad B = 0 \qquad C = 0$$

les équations des trois circonférences; les axes radicaux de ces circonférences associées deux à deux ont pour équations

$$A - B = 0 \qquad B - C = 0 \qquad C - A = 0.$$

En ajoutant ces trois équations, on obtient une identité; donc les droites qu'elles représentent passent par un même point.

Ce point est appelé *centre radical* des trois circonférences.

## Équation générale des circonférences qui, associées deux à deux, ont pour axe radical une droite donnée.

**85.** Soient

$$D = 0$$

l'équation de la droite donnée, et

$$A = 0 \qquad B = 0,$$

celles de deux circonférences ayant pour axe radical la droite D. Leur axe radical a pour équation

$$A - B = 0$$

par suite, les deux fonctions A — B et D ne doivent différer que par un facteur constant, et l'on a identiquement

$$A - B \equiv \lambda D,$$

d'où

$$B \equiv A - \lambda D.$$

L'équation cherchée est donc

$$A - \lambda D = 0,$$

A étant le premier membre de l'équation d'une circonférence et D une fonction du premier degré.

**Remarque.** — On a souvent à résoudre des problèmes dans lesquels on doit considérer simultanément deux circonférences; dans ce cas, il est quelquefois avantageux de prendre pour axe des $x$ la ligne des centres et pour axe des $y$ l'axe radical.

L'équation de la circonférence A étant

$$x^2 + y^2 - 2ax + \alpha = 0,$$

celle de la circonférence B sera

$$x^2 + y^2 - 2bx + \alpha = 0.$$

**86. Points limites.** — Considérons une série de circonférences ayant le même axe radical; en prenant cette droite pour axe des $y$ et la ligne que décrit leur centre pour axe des $x$, l'équation de ces circonférences sera

$$x^2 + y^2 - 2ax + \alpha = 0,$$

$\alpha$ étant une constante et $a$ un paramètre variable.

L'équation précédente peut être mise sous la forme

$$(x - a)^2 + y^2 = a^2 - \alpha;$$

donc, parmi les circonférences de la série, il y en a deux qui se réduisent à des points L et L'; ces circonférences particulières correspondent aux valeurs suivantes du paramètre $a$ :

$$a = \pm\sqrt{\alpha}.$$

Les deux points L et L' ont été appelés par Poncelet *points limites;* ils sont situés sur la ligne des centres et symétriques par rapport à l'axe radical commun.

Les deux points limites L et L′ sont réels ou imaginaires, suivant que $\alpha$ est positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que les circonférences ne coupent pas ou coupent l'axe radical.

**Construction des points limites.** — La puissance de l'origine $o$ par rapport à toutes les circonférences est constante et égale à $\alpha$;

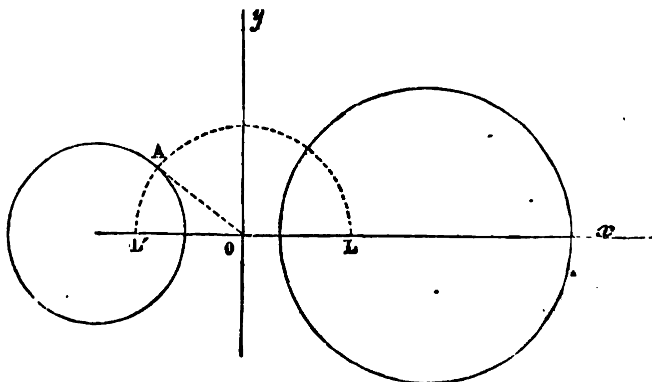



Fig. 70.

on obtiendra donc les points limites en menant du point $o$ une tangente $o$A à l'une des circonférences et en prenant ensuite sur l'axe des $x$ des longueurs $o\mathrm{L} = o\mathrm{L}' = o\mathrm{A}$.

**Remarque.** — On vérifie facilement que la puissance d'un point fixe pris sur l'axe radical, par rapport aux circonférences de la série, est constante.

THÉORÈME.

*Les polaires des points limites par rapport aux circonférences de la série sont fixes.*

En effet, les coordonnées des points limites étant

$$x = \pm\sqrt{\alpha} \cdot y = 0,$$

les équations de leurs polaires seront

$$x(\pm\sqrt{\alpha} - a) \mp a\sqrt{\alpha} + \alpha = 0,$$

ou bien

$$(\pm\sqrt{\alpha} - a)(x \pm \sqrt{\alpha}) = 0,$$

ou enfin

$$x \pm \sqrt{\alpha} = 0.$$

Ainsi la polaire d'un point limite par rapport aux circonférences est fixe; c'est une parallèle à l'axe radical commun menée par l'autre point limite.

**Équation d'une circonférence passant par trois points donnés.**

87. Soient $A_1(x_1, y_1)$ $A_2(x_2, y_2)$ $A_3(x_3, y_3)$ les trois points donnés; les axes étant rectangulaires, l'équation de la circonférence cherchée sera

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2a'y + \alpha = 0, \tag{12}$$

et les trois relations de condition seront

$$\begin{aligned} x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2a'y_1 + \alpha &= 0 \\ x_2^2 + y_2^2 - 2ax_2 - 2a'y_2 + \alpha &= 0 \\ x_3^2 + y_3^2 - 2ax_3 - 2a'y_3 + \alpha &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Il faut, des équations (13), tirer les valeurs des inconnues $a, a', \alpha$ et les porter dans l'équation (12); cela revient à éliminer $a, a', \alpha$ entre les équations (12) et (13), ce qui donne l'équation

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \tag{14}$$

laquelle représente la circonférence passant par les trois points $A_1, A_2, A_3$.

Le coefficient de $x^2 + y^2$ dans l'équation (14) est

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix};$$

cette équation sera donc du second degré tant que le déterminant précédent ne sera pas nul, c'est-à-dire quand les trois points ne seront pas en ligne droite.

Quand les trois points sont en ligne droite, l'équation (14) s'abaisse au premier degré et représente la droite $A_1A_2A_3$.

Pour que l'équation (14) devienne une identité, il faut et il suffit que deux des trois points $A_1, A_2, A_3$ coïncident.

D'abord le coefficient de $x^2+y^2$ devant être nul, les trois points $A_1, A_2, A_3$ sont en ligne droite; pour simplifier les calculs, nous prendrons cette droite pour axe des $x$ et le point $A_3$ pour origine; l'équation (14) devient alors

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ x_1^2 & x_1 & 0 \\ x_2^2 & x_2 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

dans cette équation les coefficients de $x^2+y^2$ et de $x$ sont nuls; en exprimant que le coefficient de $y$ est nul, on obtient la relation

$$0 = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 \\ x_2^2 & x_2 \end{vmatrix} = x_1 x_2 (x_1 - x_2),$$

on y satisfait en posant

$$x_1 = 0 \quad \text{ou} \quad x_2 = 0 \quad \text{ou} \quad x_1 = x_2.$$

Dans le premier cas, le point $A_1$ coïncide avec $A_3$; dans le deuxième, le point $A_2$ coïncide avec $A_3$; dans le troisième, les points $A_1$ et $A_2$ coïncident.

**Remarque.** — Pour vérifier la proposition précédente, on aurait pu ne pas particulariser les axes. Les trois points $A_1, A_2, A_3$ étant en ligne droite, on posera

$$x_2 = x_1 + a\rho_2 \qquad y_2 = y_1 + b\rho_2$$
$$x_3 = x_1 + a\rho_3 \qquad y_3 = y_1 + b\rho_3;$$

en substituant ces valeurs dans les coefficients des termes en $x, y$, $x^2+y^2$ et dans le terme tout connu de l'équation (14), annulant les résultats, on trouvera l'équation $\rho_2\rho_3(\rho_2-\rho_3)=0$.

Nous ne développerons pas les calculs que nous venons d'indiquer.

**88. Théorème de Luchterhand (Journal de Crelle, t. XXIII).** — La relation qui exprime que quatre points $A_1, A_2, A_3, A_4$ sont sur une même circonférence est

$$\begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2 & x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les éléments de la première colonne représentent les carrés des distances des points à l'origine, et les mineurs relatifs à ces éléments sont, au signe près, égaux aux doubles des aires des triangles $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$; nous désignerons ces aires par $S_1, S_2, S_3, S_4$.

En développant le dernier déterminant par rapport aux éléments de la première colonne, nous aurons la relation

$$\overline{oA}_1^2 . S_1 - \overline{oA}_2^2 . S_2 + \overline{oA}_3^2 . S_3 - \overline{oA}_4^2 . S_4 = 0, \tag{15}$$

qui conduit au théorème suivant :

**Théorème.** — *Dans tout quadrilatère inscriptible, si l'on multiplie le carré de la distance d'un sommet à un point quelconque o du plan par l'aire du triangle formé par les trois autres sommets, la somme des produits relatifs aux deux triangles ayant pour base une même diagonale est égale à la somme des produits relatifs aux deux triangles ayant pour base l'autre diagonale.*

### Relation entre les distances mutuelles de quatre points situés sur une même circonférence.

**89.** Faisons coïncider successivement le point $o$ avec les points $A_1, A_2, A_3, A_4$ en appliquant chaque fois la relation (15), nous obtiendrons les quatre équations suivantes :

$$(16)\quad \begin{aligned} -d_1^2 S_2 + d_1^3 S_3 - d_1^4 S_4 &= 0 \\ d_2^1 S_1 + d_2^3 S_3 - d_2^4 S_4 &= 0 \\ d_3^1 S_1 - d_3^2 S_2 - d_3^4 S_4 &= 0 \\ d_4^1 S_1 - d_4^2 S_2 + d_4^3 S_3 &= 0. \end{aligned}$$

On a représenté par $d_i^j$ le carré de la distance des points $A_i$ et $A_j$.

En éliminant $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$ entre les équations (16), on obtient l'équation

$$\begin{vmatrix} 0 & d_1^2 & d_1^3 & d_1^4 \\ d_2^1 & 0 & d_2^3 & d_2^4 \\ d_3^1 & d_3^2 & 0 & d_3^4 \\ d_4^1 & d_4^2 & d_4^3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

qui lie les distances mutuelles de quatre points situés sur la circonférence.

Il est évident que l'on a

$$d_i^j = d_j^i.$$

La relation précédente a été donnée sous une autre forme par Feuerbach; elle a été obtenue sous la forme d'un déterminant par M. Cayley.

## Équation des circonférences coupant orthogonalement deux circonférences données.

**90.** On dit que deux circonférences se coupent à angle droit quand les tangentes au point d'intersection sont perpendiculaires.

Il est facile de trouver la condition nécessaire et suffisante pour que deux circonférences se coupent à angle droit, ou, ce qui est la même chose, soient orthogonales.

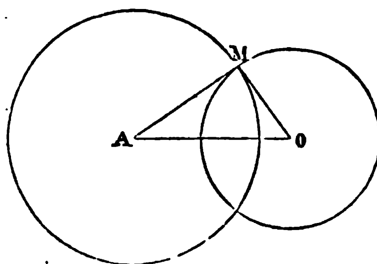


Fig. 71.

Soit M le point où les deux circonférences A et O se coupent à angle droit, les rayons AM, OM perpendiculaires sur les tangentes seront perpendiculaires entre eux, et le triangle rectangle AMO donnera la relation

$$\overline{AO}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{OM}^2.$$

**Théorème.** — *Pour que deux circonférences soient orthogonales, il faut et il suffit que le carré de la distance des centres soit égal à la somme des carrés des rayons.*

Nous allons traduire analytiquement cette propriété géométrique.

Les axes étant supposés rectangulaires, les équations des deux circonférences seront

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2a'y + \alpha = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + \lambda = 0,$$

en posant

$$\alpha = a^2 + a'^2 - R^2 \qquad \lambda = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2.$$

D'après le théorème précédent la relation qui exprime que les deux circonférences sont orthogonales sera

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - a')^2 = R^2 + \rho^2,$$

ou, en développant,

$$(17) \qquad 2ax_0 + 2a'y_0 = \alpha + \lambda.$$

**Application.** — *Les centres des circonférences* O *coupant à angle droit deux circonférences données* A *et* B *sont situés sur l'axe radical des circonférences* A *et* B.

Prenons pour axe des $x$ la ligne des centres des circonférences A et B, et pour axe des $y$ leur axe radical; elles auront pour équation

$$x^2 + y^2 - 2ax + \alpha = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2bx + \alpha = 0.$$

Soit

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + \lambda = 0$$

l'équation de la circonférence O; comme elle coupe à angle droit les circonférences A et B, on aura les deux relations

$$2ax_0 = \lambda + \alpha \qquad 2bx_0 = \lambda + \alpha;$$

on en tire

$$(a - b)x_0 = 0,$$

c'est-à-dire $x_0 = 0$; donc les centres des circonférences variables O se trouvent sur l'axe radical des circonférences A et B.

## Équation de la circonférence coupant orthogonalement trois circonférences données.

**91.** Soient

$$A = x^2 + y^2 - 2axz - 2a'yz + \alpha z^2 = 0$$
$$B = x^2 + y^2 - 2bxz - 2b'yz + \beta z^2 = 0$$
$$C = x^2 + y^2 - 2cxz - 2c'yz + \gamma z^2 = 0$$

les équations des circonférences données, rendues homogènes, et

$$U = x^2 + y^2 - 2x_0xz - 2y_0yz + \lambda z^2 = 0$$

l'équation de la circonférence cherchée, rendue également homogène.

En exprimant que la circonférence U coupe orthogonalement les circonférences A, B, C on a les trois relations

$$(18)\qquad \begin{aligned} \lambda - 2ax_0 - 2a'y_0 + \alpha &= 0 \\ \lambda - 2bx_0 - 2b'y_0 + \beta &= 0 \\ \lambda - 2cx_0 - 2c'y_0 + \gamma &= 0. \end{aligned}$$

Pour avoir l'équation de cette circonférence, il faut tirer des équations (18) les valeurs de $\lambda, x_0, y_0$ et les porter dans l'équation $U = 0$; cela revient à éliminer $\lambda, x_0, y_0$ entre cette équation et les équations (18); le résultat de cette élimination est

$$\begin{vmatrix} z^2 & zx & zy & x^2+y^2 \\ 1 & a & a' & \alpha \\ 1 & b & b' & \beta \\ 1 & c & c' & \gamma \end{vmatrix} = 0;$$

cette équation, dans laquelle on devra faire $z = 1$, est celle de la circonférence cherchée; on peut lui donner une forme plus simple et qui mérite d'être signalée.

Multiplions par $z$ les éléments de la quatrième colonne du déterminant précédent, et aux résultats ajoutons les produits des éléments de la seconde colonne par $-x$, et les produits des éléments de la troisième colonne par $-y$, nous aurons l'équation

$$\begin{vmatrix} z^2 & zx & zy & 0 \\ 1 & a & a' & A'_z \\ 1 & b & b' & B'_z \\ 1 & c & c' & C'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le nouveau déterminant ajoutons : 1° aux éléments de la seconde colonne multipliés par $-z$ ceux de la première colonne multipliés par $x$; 2° aux éléments de la troisième colonne multipliés par $-z$ ceux de la première colonne multipliés par $y$, nous aurons l'équation

$$\begin{vmatrix} z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & A'_x & A'_y & A'_z \\ 1 & B'_x & B'_y & B'_z \\ 1 & C'_x & C'_y & C'_z \end{vmatrix} = 0,$$

ou enfin l'équation

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} A'_x & A'_y & A'_z \\ B'_x & B'_y & B'_z \\ C'_x & C'_y & C'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est la forme remarquable que l'on peut donner à l'équation de la circonférence coupant à angle droit trois circonférences données.

**Remarque.** — Nous avons vu que les centres des circonférences coupant à angle droit les circonférences A et B sont situés sur l'axe radical de ces deux circonférences; il résulte de là que le centre de la circonférence *orthotomique*, par rapport aux circonférences A, B, C, coïncide avec leur centre radical. Quant au rayon de cette circonférence, il est égal à la longueur de la tangente menée du centre radical à l'une quelconque des trois circonférences.

PROBLÈME.

**92.** *Étant données trois circonférences* A, B, C, *trouver les points* P *du plan dont les polaires, par rapport aux trois circonférences, concourent en un même point.*

Soient $x$ $y$ les coordonnées du point P et

$$A=0 \qquad B=0 \qquad C=0$$

les équations des trois circonférences rapportées à des axes *rectangulaires;* les polaires du point P par rapport à ces circonférences auront respectivement pour équations

$$(20) \qquad \begin{aligned} XA'_x+YA'_y+ZA'_z&=0\\ XB'_x+YB'_y+ZB'_z&=0\\ XC'_x+YC'_y+ZC'_z&=0. \end{aligned}$$

Pour que ces trois droites concourent, il faut que l'on ait l'équation

$$\begin{vmatrix} A'_x & A'_y & A'_z\\ B'_x & B'_y & B'_z\\ C'_x & C'_y & C'_z \end{vmatrix}=0.$$

Le point P doit donc se trouver sur la circonférence *orthotomique* relative aux trois circonférences données.

**Remarque I.** — Soient $x_0, y_0$ les coordonnées du point de concours $P_0$ des trois polaires, elles devront satisfaire aux équations (20), ou, ce qui est la même chose, aux équations

$$(21) \qquad \begin{aligned} xA'_{x_0}+yA'_{y_0}+zA'_{z_0}&=0\\ xB'_{x_0}+yB'_{y_0}+zB'_{z_0}&=0\\ xC'_{x_0}+y\,C'_{y_0}+zC'_{z_0}&=0. \end{aligned}$$

Si dans ces équations on regarde $x, y, z$ comme des coordonnées courantes, elles représenteront les trois polaires du point $P_0$; mais ces polaires passent par le point P, puisque les coordonnées de ce point satisfont aux équations (21); donc le point $P_0$ est lui-même sur le cercle orthotomique.

**Remarque II.** — Les calculs précédents ne supposent pas les axes de coordonnées rectangulaires; donc l'équation (19) représente le cercle *orthotomique*, même quand les coordonnées sont *obliques*.

## Circonférences tangentes à trois circonférences données.

**93.** Proposons-nous de construire une circonférence tangente à trois circonférences données A, B, C; huit cas peuvent se présenter:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1° La circonférence inconnue S touche. . . | intérieurement les trois circonférences | | 1er groupe. |
| 2° — — — | extérieurement les trois circonférences | | |
| 3° — — — | extérieurement A, | intérieurement B et C | 2e groupe. |
| 4° — — — | intérieurement A, | extérieurement B et C | |
| 5° — — — | extérieurement B, | intérieurement A et C | 3e groupe. |
| 6° — — — | intérieurement B, | extérieurement A et C | |
| 7° — — — | extérieurement C, | intérieurement A et B | 4e groupe. |
| 8° — — — | intérieurement C, | extérieurement A et B | |

Le problème peut donc avoir huit solutions qui se partagent en quatre groupes de deux, comme l'indique le tableau précédent.

Pour fixer les idées, nous supposerons que la circonférence S touche extérieurement les trois circonférences, et nous chercherons à déterminer le point $a$ où elle touche A. Afin de simplifier l'écriture, nous prendrons pour origine le centre de la circonférence A. Les axes étant rectangulaires les équations des trois circonférences données seront

$$A = x^2 + y^2 - R^2 = 0$$
$$B = (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - R'^2 = 0$$
$$C = (x - \alpha'')^2 + (y - \beta'')^2 - R''^2 = 0.$$

Soient $x', y'$ les coordonnées du centre de la circonférence S et $\rho$ son rayon; en exprimant que S touche A nous aurons la relation

$$x'^2 + y'^2 = (R + \rho)^2 = R^2 + 2R\rho + \rho^2,$$

ou bien

$$A' = 2R\rho + \rho^2,$$

$A'$ désignant ce que devient la fonction A quand on y remplace $x$ et $y$ par $x'$ et $y'$.

En résumé, les relations exprimant que la circonférence S touche les circonférences A, B, C sont

$$A' = 2R\rho + \rho^2 \qquad B' = 2R'\rho + \rho^2 \qquad C' = 2R''\rho + \rho^2;$$

on en tire

$$(22) \qquad A' - B' = 2\rho(R - R') \qquad A' - C' = 2\rho(R - R'').$$

Appelons $x$ et $y$ les coordonnées du point de contact $a$; nous aurons

$$x = \frac{Rx'}{R+\rho} \qquad y = \frac{Ry'}{R+\rho};$$

d'où

$$x' = \frac{R+\rho}{R}x$$

$$y' = \frac{R+\rho}{R}y.$$

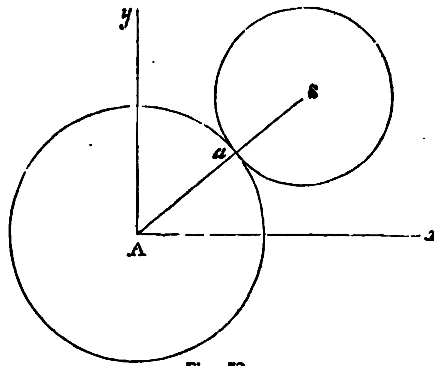


Fig. 72.

En substituant ces valeurs dans les équations (22), on aura deux relations entre $\rho$ et les coordonnées du point A.

Cherchons d'abord la valeur que prend $A' - B'$ après cette substitution: on a

$$A' - B' = 2\alpha' x' + 2\beta' y' - \alpha'^2 - \beta'^2 + R'^2 - R^2$$

$$= 2\frac{R+\rho}{R}(\alpha' x + \beta' y) - \alpha'^2 - \beta'^2 + R'^2 - R^2$$

$$= \frac{R+\rho}{R}(2\alpha' x + 2\beta' y - \alpha'^2 - \beta'^2 + R'^2 - R^2)$$

$$+ \frac{\rho}{R}(\alpha'^2 + \beta'^2 + R^2 - R'^2)$$

ou bien

$$A' - B' = \frac{R+\rho}{R}(A - B) + \frac{\rho}{R}(\alpha'^2 + \beta'^2 + R^2 - R'^2).$$

La première des équations (22) devient donc, après la substitution indiquée,

$$\frac{R+\rho}{R}(A - B) + \frac{\rho}{R}(\alpha'^2 + \beta'^2 + R^2 - R'^2) = 2\rho(R - R')$$

et en réduisant

$$(R+\rho)(A-B)=\rho\,[(R-R')^2-\alpha'^2-\beta'^2].$$

La seconde des équations (22) donne de même

$$(R+\rho)(A-C)=\rho\,[(R-R'')^2-\alpha''^2-\beta''^2].$$

En éliminant $\rho$ entre ces deux équations, on trouve que le point de contact $a$ se trouve à l'intersection de la circonférence A avec la droite qui a pour équation

$$\text{(23)}\qquad \frac{A-B}{(R-R')^2-\alpha'^2-\beta'^2}=\frac{A-C}{(R-R'')^2-\alpha''^2-\beta''^2}.$$

La forme de cette équation montre que la droite passe par le centre radical des trois circonférences A, B, C; pour la déterminer, il suffit donc d'en trouver un second point.

A cet effet, développons les différences A — B, A — C; l'équation (23) deviendra

$$\frac{2\alpha'x+2\beta'y-\alpha'^2-\beta'^2+R'^2-R^2}{(R-R')^2-\alpha'^2-\beta'^2}$$
$$=\frac{2\alpha''x+2\beta''y-\alpha''^2-\beta''^2+R''^2-R^2}{(R-R'')^2-\alpha''^2-\beta''^2},$$

ou, en retranchant les dénominateurs des numérateurs correspondants

$$\frac{\alpha'x+\beta'y+R(R'-R)}{(R-R')^2-\alpha'^2-\beta'^2}=\frac{\alpha''x+\beta''y+R(R''-R)}{(R-R'')^2-\alpha''^2-\beta''^2}.$$

On voit alors que la droite inconnue passe par le point de rencontre des droites qui ont pour équations

$$\alpha'x+\beta'y+R(R'-R)=0 \qquad \alpha''x+\beta''y+R(R''-R)=0.$$

La première de ces équations, par exemple, peut être écrite comme il suit:

$$\frac{R\alpha'}{R-R'}x+\frac{R\beta'}{R-R'}y-R^2=0.$$

Cette équation représente la polaire par rapport à la circonférence A, du point qui a pour coordonnées $\left(\frac{R\alpha'}{R-R'},\frac{R\beta'}{R-R'}\right)$.

Ce point est situé sur la ligne des centres AB, en dehors du segment AB, et il partage ce segment proportionnellement aux rayons R et R'; il est donc le centre de similitude *externe* des circonférences A et B.

De même la seconde droite est la polaire par rapport à la circonférence A, du centre de similitude *externe* des circonférences A et C. Il suit de là que l'intersection de nos deux droites est le pôle par rapport à la circonférence A, de l'axe de similitude *externe* des trois circonférences A, B, C; la droite représentée par l'équation (23) est donc déterminée.

**Remarque.** — Pour trouver la circonférence tangente intérieurement aux trois circonférences données, il faudrait, dans ce qui précède, changer les signes des rayons R, R', R'', ce qui n'altère pas l'équation (23).

De ce qui précède on déduit la construction suivante donnée par Gergonne :

*Pour obtenir les circonférences du premier groupe, on joint au centre radical des trois circonférences données les pôles de leur axe de similitude externe par rapport à ces circonférences; les points où les lignes de jonction rencontrent les circonférences sont les points de contact cherchés. On est alors ramené à faire passer une circonférence par trois points.*

En résumé, soient $E_a$, $E_b$, $E_c$ les centres de similitude externes et $I_a$, $I_b$, $I_c$ les centres de similitude internes des trois circonférences. ($E_a$, $I_a$, par exemple, sont les centres de similitude relatifs aux circonférences B et C.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| *En appliquant la construction donnée à l'axe de similitude.....* | $I_aI_bI_c$ | on aura les circonférences du | 1er Groupe. |
| | $I_aE_bE_c$ | | 2e Groupe. |
| | $I_bE_aE_c$ | | 3e Groupe. |
| | $I_cE_aE_b$ | | 4e Groupe. |

## EXERCICES.

1° Les angles inscrits dans un même segment de cercle sont égaux.

2° Si d'un point on mène deux tangentes à une circonférence, la distance d'un point quelconque de cette circonférence à la corde de contact est moyenne proportionnelle entre les distances du même point aux deux tangentes.

3° Quand on joint un point quelconque de la circonférence circonscrite à

un triangle équilatéral aux trois sommets, l'une des distances est égale à la somme des deux autres.

4° Étant données une circonférence et une droite, si de chaque point de la droite comme centre on décrit une circonférence ayant pour rayon la tangente menée de ce point à la circonférence donnée, toutes ces circonférences passent par un point fixe.

5° Les projections des centres de deux circonférences sur les quatre tangentes en leurs points d'intersection sont sur une même circonférence.

6° Par un point A pris sur un diamètre d'une circonférence on mène une perpendiculaire AB à ce diamètre, puis, par le point A une sécante quelconque rencontrant la circonférence aux points C et D : les tangentes aux points C et D déterminent sur AB un segment C'D' ayant pour milieu le point A.

7° On joint un point quelconque M d'une circonférence à un point B pris sur un diamètre AA' la perpendiculaire menée par le point M à la droite BM détermine sur les tangentes aux points A et A', à partir des points de contact, des segments ayant un produit constant.

8° On donne sur une circonférence deux cordes AB, CD qui se coupent au point E ; par le point E on mène à la circonférence une tangente EF, et l'on joint le point de contact F au milieu I de la corde CD ; la ligne de jonction rencontre la circonférence au point G. Démontrer que les droites GA, GB déterminent sur la corde CD un segment ayant pour milieu le point I.

9° Du milieu O de la base BC d'un triangle isoscèle ABC comme centre on décrit une circonférence tangente aux deux côtés AB, AC ; une tangente quelconque à cette circonférence rencontre les côtés AB, AC en des points B' et C'. Démontrer que le produit des segments BB', CC' est constant.

10° Par le point de rencontre E des diagonales d'un quadrilatère ABCD inscrit dans une circonférence, on mène une corde ayant pour milieu le point E. Démontrer que le point E est aussi le milieu des segments interceptés sur cette corde par les côtés opposés du quadrilatère.

11° Quatre points $(a, b)$ $(a', b')$ forment une division harmonique ; toutes les circonférences qui passent par deux points conjugués $(a, a')$ coupent orthogonalement la circonférence décrite sur la distance des deux autres points conjugués $(b, b')$ comme diamètre.

12° Étant donné un quadrilatère ABCD, une transversale rencontre en $a$ et $a'$ les deux côtés opposés AB, CD, en $b$ et $b'$ les deux autres côtés AD, BC, enfin en $c$ et $c'$ les deux diagonales AC, BD. Démontrer que les circonférences décrites sur les segments $aa'$, $bb'$, $cc'$ comme diamètres ont le même axe radical.

13° Étant données deux circonférences $o$ et $o'$ qui ne se touchent pas, de chaque point M de l'une $o$, on mène des droites aux centres de similitude E, I des deux circonférences ; ces droites rencontrent la circonférence $o'$ en quatre points $m$, $n$, $m'$, $n'$ ; on demande de prouver que deux de ces points sont sur un diamètre de la circonférence $o'$, et que la droite qui joint les deux autres passe par un point fixe.

14° On donne une circonférence $o$ et deux points A, B ; la distance du point A à la polaire de B divisée par la distance du point B à la polaire de A donne un quotient égal au rapport $\frac{oA}{oB}$.

15° Si de chaque point d'une droite on mène deux tangentes à une circonférence, la somme des distances de ces deux tangentes à un point fixe quelconque, divisées par leurs distances au pôle de la droite, est constante.

16° Dans tout quadrilatère circonscrit à une circonférence, les milieux des diagonales et le centre de la circonférence sont en ligne droite.

17° Quand une corde d'un cercle tourne autour d'un point fixe P, les rayons menés du centre aux extrémités de la corde font avec le rayon qui passe par le point P des angles $\alpha$ et $\beta$, tels que le produit $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ est constant.

18° Si de chaque point d'une droite on mène des tangentes à une circonférence, et que l'on appelle $\alpha, \beta$ les angles que les tangentes font avec la droite, le produit $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ est constant.

19° De chaque point de la circonférence ayant pour diamètre la distance des centres de similitude de deux circonférences $o$ et $o'$, on voit ces circonférences sous des angles égaux.

20° L'axe radical de deux circonférences est à égale distance des polaires des deux centres de similitude.

21° Les polaires d'un point quelconque de l'axe radical de deux circonférences se coupent sur cet axe radical.

22° Étant données deux circonférences, si de chaque point de l'une on mène une tangente à l'autre et une perpendiculaire à leur axe radical, le carré de la tangente sera à la longueur de la perpendiculaire dans un rapport constant.

23° Si d'un point de l'axe radical de deux circonférences on mène deux transversales passant respectivement par les pôles de cet axe dans les deux circonférences, les droites qui joignent les points où ces transversales rencontrent les circonférences passent respectivement par les centres de similitude.

24° Si d'un point de l'axe radical de deux circonférences on leur mène des tangentes, les quatre points de contact sont sur une circonférence ayant le point considéré pour centre; cette circonférence rencontre la ligne des centres en deux points fixes.

25° La circonférence décrite sur la distance des centres de deux circonférences comme diamètre passe par les points où les tangentes communes extérieures coupent les tangentes communes intérieures.

Les droites qui joignent ces points de rencontre coupent la ligne des centres en deux points dont chacun a la même polaire dans les deux circonférences.

26° Quand trois circonférences ont le même axe radical, de chaque point de l'une on voit les deux autres sous des angles dont les moitiés ont leurs tangentes trigonométriques dans un rapport constant.

27° Quand trois circonférences ont le même axe radical, si d'un point on leur mène des tangentes, les trois cordes de contact concourent en un même point.

28° Étant données trois circonférences, si par un même point on en mène trois autres passant respectivement par les points d'intersection des trois

premières prises deux à deux, ces trois circonférences se couperont en un même point.

29° Toutes les circonférences ayant leur centre sur une même droite et coupant orthogonalement une circonférence donnée ont même axe radical.

30° Les polaires d'un point $P_0$ par rapport aux circonférences qui ont toutes le même axe radical passent par un point fixe $P_1$ ; réciproquement les polaires du point $P_1$ passent par le point $P_0$.

La droite $P_0 P_1$ est tangente aux points $P_0$ et $P_1$ à deux circonférences du faisceau.

La circonférence décrite sur $P_0 P_1$ comme diamètre passe par les points limites.

31° Si une circonférence mobile coupe deux circonférences fixes sous des angles constants, elle coupera sous des angles constants toutes les circonférences ayant le même axe radical que les deux circonférences données.

# CHAPITRE III

## LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

**94.** On appelle lieu géométrique l'ensemble des points qui jouissent d'une certaine propriété à l'exclusion des autres points du plan.

Nous nous proposons d'exposer la marche à suivre pour trouver l'équation d'un lieu géométrique.

Nous distinguerons deux cas :

**Premier cas.** — Il arrive quelquefois que l'on obtient immédiatement l'équation d'un lieu en traduisant à l'aide des symboles de l'Algèbre la propriété géométrique qui le définit.

Nous allons donner quelques exemples.

**Cissoïde de Dioclès.** — *Étant donnés une circonférence, un diamètre o*A *et la tangente* AT *à l'extrémité de ce diamètre, on mène par le point o une sécante mobile qui rencontre la circonférence au point* B *et la tangente au point* C, *et l'on prend sur la sécante une longueur* OM = BC; *le lieu du point* M *est une courbe appelée* **cissoïde**.

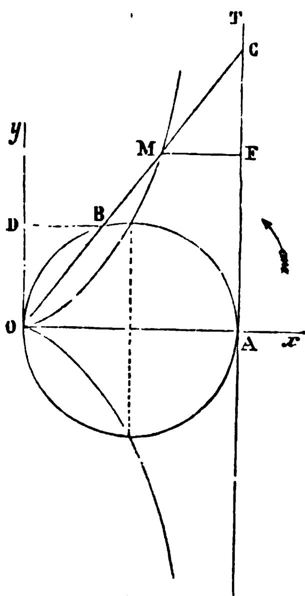


Fig. 73.

La courbe est évidemment symétrique par rapport au diamètre *o*A; quand la sécante tourne à partir de *o*A dans le sens de la flèche, la longueur BC croît constamment depuis zéro jusqu'à l'infini; donc la courbe part de l'origine *o* et s'étend à l'infini.

Quand la sécante *o*M vient coïncider avec *o*A, le rayon vecteur *o*M s'annule; par suite, la courbe touche le diamètre *o*A au point *o*.

Si l'on fait tourner la sécante en sens contraire de la flèche, on obtient une seconde branche symétrique de la première par rapport à *o*A.

On voit que du point $o$ partent deux branches de courbes qui s'arrêtent en ce point et touchent $oA$; le point $o$ est appelé point de *rebroussement*.

La distance BD du point B à la tangente $oy$ et la distance MF du point M à la tangente AT sont égales; mais, quand la sécante $oM$ devient parallèle à la tangente AT, la distance BD tend vers zéro et par suite aussi la distance MF; ainsi, quand le point M s'éloigne à l'infini sur la courbe, sa distance à la tangente AT tend vers zéro; on dit que la courbe est *asymptote* à la tangente AT.

Nous remarquerons enfin que la courbe passe par les points de la circonférence pour lesquels la tangente est parallèle au diamètre $oA$.

*Équation de la courbe.* — On obtient facilement l'équation de la cissoïde en *coordonnées polaires;* nous prendrons pour pôle le point $o$, pour axe polaire le diamètre $oA$. Appelons $(\rho, \omega)$ les coordonnées du point M, R le rayon de la circonférence; les triangles rectangles $oAB$, $oAC$ donnent

$$oB = 2R\cos\omega \qquad oC = \frac{2R}{\cos\omega},$$

l'équation de la courbe est donc

$$\rho = oC - oB = \frac{2R}{\cos\omega} - 2R\cos\omega,$$

ou, en réduisant,

$$\rho = \frac{2R\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

Cherchons maintenant l'équation de la courbe en coordonnées rectilignes en prenant $oA$ pour axe des $x$ et la tangente au point $o$ pour axe des $y$.

Les formules de transformation donnent

$$\rho\cos\omega = x \qquad \sin\omega = \frac{y}{\rho};$$

par suite, l'équation de la cissoïde en coordonnées rectilignes sera

$$x(x^2 + y^2) = 2Ry^2.$$

*Construction de la courbe.* — La courbe est symétrique par rapport à l'axe des $x$, car son équation ne contient $y$ qu'à une

puissance paire; de cette équation résolue par rapport à $y$ on tire

$$y = x\sqrt{\frac{x}{2R - x}}.$$

En prenant le signe $+$ devant le radical on aura la branche située par rapport à $ox$ du côté des $y$ positifs.

Pour que l'ordonnée $y$ soit réelle, il faut que $x$ soit compris entre 0 et 2R, la courbe est donc elle-même comprise entre les deux tangentes $oy$, AT. Quand $x$ croît de 0 à 2R, l'ordonnée $y$ croît de 0 à $\infty$, ce qui donne une branche de courbe partant de l'origine $o$ et s'éloignant à l'infini. En même temps, la distance $MF = 2R - x$ tend vers zéro, la courbe est donc asymptote à la tangente AT; enfin pour $x = R$ on a $y = R$; par suite, la courbe rencontre la circonférence aux points pour lesquels la tangente à cette circonférence est parallèle à l'axe des $x$.

Newton a donné le moyen de tracer la cissoïde d'un mouvement continu.

Imaginons une équerre dont un des côtés SI est indéfini et dont l'autre côté SF est égal au diamètre de la circonférence $o$A; puis ayant prolongé le diamètre $o$A d'une longueur $oI = R$, faisons mouvoir l'équerre dans le plan de manière que le côté indéfini passant toujours par le point I, l'extrémité F de l'autre côté décrive le diamètre D$z$ perpendiculaire sur $o$A; alors le milieu M de cet autre côté décrira la cissoïde.

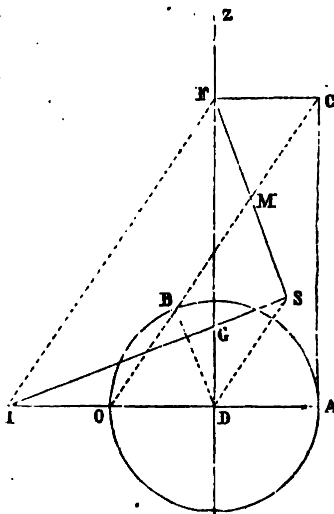


Fig. 74.

Pour le faire voir, menons la ligne $o$M qui rencontre la circonférence au point B et la tangente AT au point C, il faut montrer que $o$M est égal à BC, ou encore que $o$B est égal à MC.

Les deux triangles rectangles IDG, GSF sont égaux, car les angles ayant leur sommet au point G sont égaux, et l'on a en outre

$$ID = SF = 2R.$$

De l'égalité de ces triangles on conclut

$$GD = GS \qquad GI = GF;$$

par suite, DS est parallèle à IF, et la droite $oM$ qui joint les milieux $o$ et M des côtés non parallèles du trapèze IFSD est parallèle à IF. De là résulte l'égalité des triangles rectangles FID, C$o$A, et par suite l'égalité des côtés AC, DF; la figure DFCA est donc un rectangle et le côté FC est égal au rayon DA.

Comparons maintenant les triangles isoscèles $o$BD, FMC; leurs côtés égaux ont pour longueur commune le rayon R et les angles à la base $o$ et C sont égaux comme alternes internes; ces deux triangles sont donc égaux, et l'on a

$$oB = MC.$$

*Généralisation.* — On peut généraliser de plusieurs manières la définition de la cissoïde.

1° Au lieu de prendre pour le point $o$ le point de la circonférence diamétralement opposé à celui où elle est touchée par la tangente AT, on peut prendre un point quelconque de cette circonférence.

La courbe ainsi obtenue est la *cissoïde oblique*.

2° On peut remplacer la tangente AT par une droite quelconque parallèle à cette tangente.

3° On peut remplacer le point $o$ par un point quelconque du diamètre $o$A.

**Strophoïde ou Focale à nœud de Quételet.** — *On donne un angle $yox$ et un point* A *sur le côté $ox$; par ce point, on mène des sécantes qui rencontrent $oy$ au point* B; *puis, sur chaque sécante, on porte, à partir du point* B, *des longueurs* $BM = BM' = oB$. *La courbe décrite par les points* M *et* M' *est une* **strophoïde.**

Nous commencerons par étudier cette courbe géométriquement.

Remarquons d'abord que, les triangles $o$BM, $o$BM' étant isoscèles, les rayons vecteurs $o$M, $o$M' sont respectivement perpendiculaires sur les bissectrices des angles $o$BM, $o$BM'.

Supposons en premier lieu que le point B décrive la demi-droite $oy$; quand le point B coïncide avec le point $o$, les points M et M' coïncident également avec le point $o$; de plus, d'après la remarque précédente, les rayons vecteurs $o$M, $o$M'

deviennent les bissectrices des angles $yox$, $y'ox$. En résumé, de l'origine partent deux arcs respectivement tangents aux bissectrices des angles $yox$, $y'ox$; le point $o$ est un point *double.*

Soit C le point où $oy$ est rencontré par la perpendiculaire élevée sur $o$A en son milieu; quand le point B vient au point C on a

$$oC = CA;$$

donc la courbe passe par le point A et par le point D tel que $CA = CD = oC$. Le rayon vecteur AM s'annulant au moment où il coïncide avec AC, cette droite touche la courbe au point A.

Supposons, enfin, que le point B s'éloigne à l'infini sur $oy$, je dis :

1° Que le point M viendra coïncider avec le point E, pied de la perpendiculaire abaissée du point $o$ sur la parallèle menée par le point A à la droite $oy$;

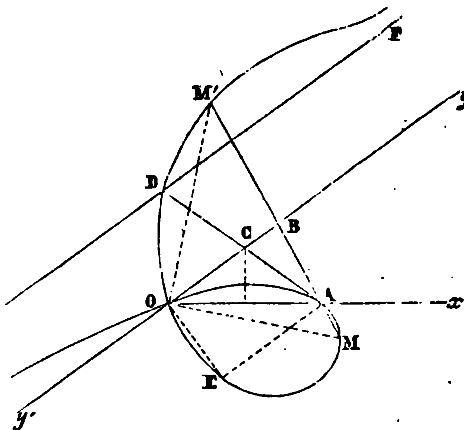


Fig. 75.

2° Que l'arc $o$M' s'étend à l'infini en devenant asymptote à la droite DF menée par le point D parallèlement à $oy$.

En effet, quand AB est parallèle à $oy$, la bissectrice de l'angle $o$BM est parallèle à $oy$; donc le rayon vecteur $o$M prend la position $o$E perpendiculaire sur $oy$; de plus, le rayon vecteur AM devenant parallèle à $oy$, le point M coïncide bien avec le point E.

D'un autre côté, les points M et M' sont également distants de $oy$, mais quand le point M' s'éloigne à l'infini, le point M coïncide avec le point E; par suite, la distance du point M' à $oy$ tend vers $o$E; donc la distance de ce point à la droite DF symétrique de AE par rapport à $oy$ tend vers zéro. Il résulte de là que la courbe est bien asymptote à la droite DF.

Supposons en second lieu que le point B décrive la demi-droite $oy'$; nous obtiendrons deux arcs de courbes partant du point $o$; l'un viendra se raccorder au point E avec l'arc AME,

l'autre s'éloignera à l'infini et aura pour asymptote la droite DF.

*Équation de la courbe.* — On obtient facilement l'équation de la *strophoïde* en coordonnées polaires; nous prendrons pour pôle le point $o$, pour axe polaire la droite $o$A.

Appelons $(\rho, \omega)$ les coordonnées du point M, $a$ la distance $o$A et $\theta$ l'angle $yox$.

Nous aurons

$$BMo = \theta - \omega \qquad MAo = \theta - 2\omega,$$

et le triangle M$o$A donnera immédiatement l'équation

$$\rho = \frac{a \sin(2\omega - \theta)}{\sin(\omega - \theta)}.$$

On vérifie facilement que la courbe décrite par le point M' est représentée par une équation semblable à la précédente.

**Strophoïde droite.** — Quand la droite $o$A est perpendiculaire sur $oy$, on dit que la *strophoïde* est droite. On obtiendra son équation en faisant $\theta = \frac{\pi}{2}$ dans l'équation précédente, ce qui donne

$$\rho = \frac{a \cos 2\omega}{\cos \omega}.$$

Transformons cette équation en coordonnées rectilignes, en prenant $o$A pour axe des $x$ et la droite donnée $oy$ pour axe des $y$.

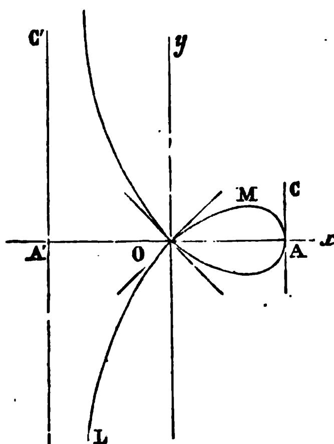


Fig. 76.

Afin de faciliter la transformation, nous écrirons l'équation précédente de la manière suivante :

$$\rho^3 \cos\omega = a\rho^2 (\cos^2\omega - \sin^2\omega).$$

On en déduit immédiatement l'équation

$$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2).$$

Pour construire la courbe, on résout cette équation par rapport à $y$, ce qui donne

$$y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}},$$

en prenant seulement le signe $+$ devant le radical.

Pour que $y$ soit réel, il faut que $x$ soit compris entre $-a$ et $+a$; donc la courbe est située entre les droites AC, A'C' qui ont respectivement pour équations

$$x = a \qquad x = -a.$$

Quand $x$ varie de 0 à $a$, l'ordonnée $y$ d'abord nulle va en croissant, puis décroît pour redevenir nulle ; on obtient ainsi l'arc $o$MA. Quand $x$ varie de 0 à $-a$ l'ordonnée $y$ toujours négative varie de 0 à $-\infty$, ce qui donne un arc $o$L qui part de l'origine et s'éloigne à l'infini, en se rapprochant de plus en plus de la droite A'C' qui est une asymptote.

En changeant le signe du radical, on obtient une branche symétrique de la première par rapport à $ox$.

*Tangente au point o.* — Le coefficient angulaire $m$ de la droite $o$M a pour expression

$$m = \frac{y}{x} = \sqrt{\frac{a-x}{a+x}};$$

ce coefficient angulaire tend vers l'unité quand $x$ tend vers zéro ; donc l'arc $o$MA touche à l'origine la première bissectrice.

*Tangente au point* A. — Le coefficient angulaire $m'$ de la droite AM a pour expression

$$m' = \frac{y}{x-a} = -x\sqrt{\frac{1}{a^2-x^2}};$$

ce coefficient angulaire devient infini quand $x$ tend vers $a$; donc au point A la tangente est parallèle à l'axe des $y$.

**Conchoïde de Nicomède.** — *Étant donnés une droite* D *et un point* A, *on mène par le point* A *une sécante qui rencontre la droite* D *au point* B; *puis sur chaque sécante on porte, à partir du point* B, *des longueurs* BM = BM' = $b$; *la courbe lieu des points* M *et* M' *est la* **conchoïde** *de Nicomède.*

Nous commencerons par étudier cette courbe géométriquement.

Appelons $a$ la distance du point A à la droite D; nous distinguerons trois cas:

1° $b > a$. — La circonférence décrite du point A comme centre

avec $b$ comme rayon rencontre la droite D aux points C et C';

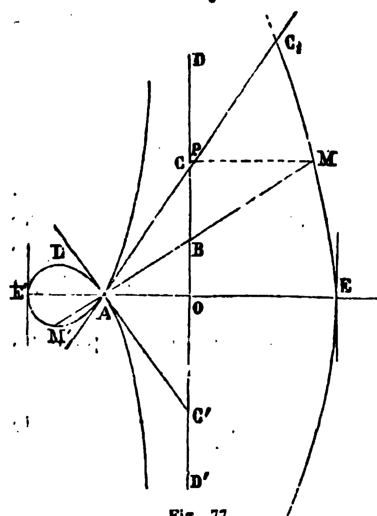



Fig. 77.

quand le rayon vecteur AB coïncide avec AC, le point M' coïncide avec A, la courbe part donc du point A tangentiellement à la droite AC. Le point B parcourant la demi-droite CD, les points M et M' s'éloignent à l'infini, et les deux arcs décrits par ces points sont asymptotes à la droite D. Soit en effet MP la distance du point M à la droite D, les triangles semblables A$o$B, MBP donnent

$$MP = \frac{a.b}{oB};$$

on voit donc que MP tend vers zéro quand le point B s'éloigne à l'infini.

Le point B parcourant le segment C$o$, on obtient les deux arcs $C_1$ME, AM'E'. Le point B parcourant la demi-droite $o$D', on obtient une courbe symétrique de la première par rapport à $o$A.

On voit que le point A est un point double.

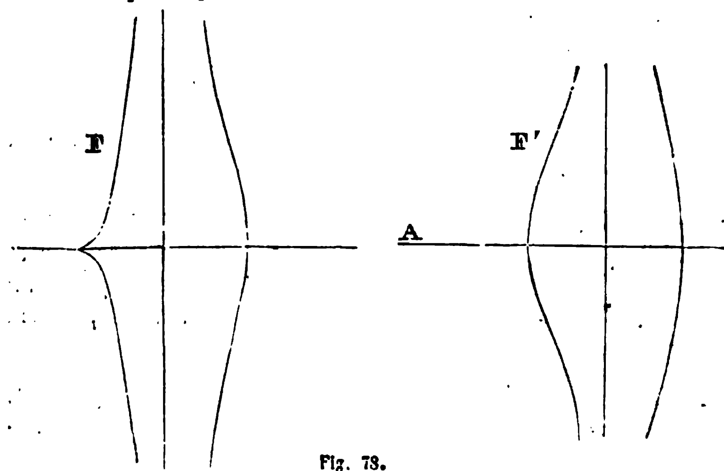



Fig. 78.

2° $b = a$. — Les deux points C et C' coïncident avec le point $o$,

la boucle AM'E'LA disparaît et le point A devient un point de rebroussement (*fig.* 78, F).

3° $b < a$. — La courbe ne passe plus par le point A, elle a la forme indiquée sur la figure F'.

*Équation de la courbe.* — On obtient facilement l'équation de la courbe en coordonnées polaires; nous prendrons le point A pour pôle et la droite A$o$ pour axe polaire. Appelons $(\rho, \omega)$ les coordonnées du point M, $(\rho', \omega)$ celles du point M', $a$ la distance $o$A; le triangle AB$o$ donne

$$AB = \frac{a}{\cos\omega}.$$

La courbe lieu du point M a donc pour équation

$$(1) \qquad \rho = \frac{a}{\cos\omega} + b,$$

et la courbe lieu du point M' a pour équation

$$(1') \qquad \rho' = \frac{a}{\cos\omega} - b.$$

Il est facile de montrer que l'équation (1) représente à la fois le lieu des points M et le lieu des points M'.

Soit en effet $\alpha$ un angle polaire définissant une direction A$z$; l'angle $\pi + \alpha$ définira la direction opposée A$z'$. Or, si l'on remplace $\omega$ par $\pi + \alpha$ dans l'équation (1) et $\omega$ par $\alpha$ dans l'équation (1'), on trouve

$$\rho = -\rho'.$$

Il résulte de là que les valeurs absolues de ces rayons vecteurs $\rho$ et $\rho'$ devront être portées toutes deux dans la même direction, et qu'on obtiendra dès lors les mêmes points du plan. Car si le rayon vecteur $\rho'$, qui correspond à l'angle polaire $\alpha$, est positif par exemple, on devra le porter dans la direction A$z$; mais alors le rayon vecteur $\rho$ qui correspond à l'angle polaire $\pi + \alpha$ sera négatif, et on devra le porter dans la direction opposée à A$z'$, c'est-à-dire dans la direction A$z$.

Cherchons maintenant l'équation de la courbe en coordonnées rectilignes en prenant pour axe des $x$ la droite A$o$ et pour axe des $y$ une perpendiculaire à cette droite menée par le point A. En chassant le dénominateur, l'équation (1) devient

$$\rho\cos\omega = a + b\cos\omega,$$

ou

$$x = a + b\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ou encore

$$(x-a)^2(x^2+y^2) = b^2x^2.$$

*Construction de la courbe.* — La courbe est symétrique par rapport à l'axe des $x$, car son équation ne contient que des puissances paires de l'ordonnée; de cette équation résolue par rapport à $y$ on tire

$$(2) \qquad y = \frac{x}{x-a}\sqrt{(a+b-x)(x+b-a)},$$

en prenant le signe $+$ devant le radical.

*Premier cas.* $b > a$. — Pour que l'ordonnée $y$ soit réelle, il faut que $x$ soit compris entre $a+b$ et $a-b$; la courbe est donc tout entière située entre les droites E, E' qui ont respectivement pour équations

$$x = a+b \qquad x = -(b-a);$$

quand $x$ varie de $-(b-a)$ à 0, $y$ est positif, part de la valeur 0, croît puis décroît pour redevenir nul; on obtient ainsi l'arc E'LA.

$x$ variant depuis 0 jusqu'à $a-\varepsilon$, $y$ devient négatif et varie de 0 à $-\infty$, ce qui donne un arc asymptote à la droite D du côté des $y$ négatifs.

Enfin $x$ variant depuis $a+\varepsilon$ jusqu'à $a+b$, $y$ toujours positif décroît de $+\infty$ à 0, ce qui donne l'arc $C_1$ME asymptote à la droite D.

On obtient toute la courbe en repliant autour de $o$A la partie que l'on vient de trouver.

*Tangente au point* A. — Le coefficient angulaire $m$ de la droite AM a pour expression

$$m = \frac{y}{x} = \frac{1}{x-a}\sqrt{(a+b-x)(x+b-a)};$$

quand $x$ tend vers zéro, ce coefficient angulaire tend vers

$$-\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a};$$

il serait facile de vérifier que la tangente au point A n'est autre chose que la droite AC'.

*Tangente au point* E. — Le coefficient angulaire $m'$ de la droite EM a pour expression

$$m' = \frac{y}{x-a-b} = -\frac{x}{x-a}\sqrt{\frac{x+b-a}{a+b-x}};$$

on voit que $m'$ devient infini quand $x$ tend vers $a+b$; la tangente au point E est donc parallèle à l'axe des $y$.

On verrait de même que la tangente au point E' est parallèle à l'axe des $y$.

La courbe a la forme indiquée sur la figure 77.

*Deuxième cas.* $b=a$. — L'équation (2) devient

$$y = \frac{x}{x-a}\sqrt{x(2a-x)}$$

la boucle ALE'M disparaît, et l'origine A est un point de rebroussement (*fig.* 78, F).

*Troisième cas.* $b<a$. — L'abscisse $x$ doit alors varier entre les valeurs positives $a-b$ et $a+b$; la courbe ne passe plus par l'origine A, elle a la forme indiquée sur la figure 78, F'. Ce dernier cas donne lieu à une remarque importante. On voit que les coordonnées de l'origine A satisfont à l'équation de la courbe, et cependant aucune branche de courbe ne passe en réalité par l'origine; on dit que le point A est *isolé* ou *conjugué*.

**Second cas.** — Le plus souvent il n'est pas possible de trouver immédiatement l'équation du lieu, et, par une marche qui sera indiquée plus loin, on est conduit à considérer les points du lieu comme les intersections de deux courbes variables A et B dont les équations contiennent chacune un paramètre arbitraire $\alpha$.

Soient

$$(3) \qquad \begin{cases} f(x,y,\alpha)=0 \\ f_1(x,y,\alpha)=0 \end{cases}$$

les équations des deux courbes A et B.

Donnons au paramètre $\alpha$ des valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$; on obtiendra des couples de courbes $(A_1, B_1)(A_2, B_2)\ldots$ se coupant en des points $C_1, C_2, \ldots$; et, si l'on fait varier $\alpha$ d'une manière continue, les points $C_1, C_2, \ldots$ décriront en général une courbe D; cette courbe est le ***lieu géométrique*** des points d'intersection des courbes A et B.

Je dis que pour avoir l'équation de la courbe D il faut *éliminer* le paramètre $\alpha$ entre les équations (3).

Soit

(4) $$\varphi(x, y) = 0$$

le résultant des équations (3); considérons un point $C_1(x_1, y_1)$ intersection des courbes $A_1$ et $B_1$; on aura les deux égalités

$$f(x_1, y_1, \alpha_1) = 0 \qquad f_1(x_1, y_1, \alpha_1) = 0;$$

elles nous montrent que les deux équations

$$f(x_1, y_1, \alpha) = 0 \qquad f_1(x_1, y_1, \alpha) = 0$$

ont une solution commune $\alpha = \alpha_1$; par suite, les coordonnées $x_1$ et $y_1$ doivent satisfaire à l'équation (4).

Nous avons donc démontré que les coordonnées de tous les points de la courbe D satisfont à l'équation (4).

Réciproquement, tous les points de la courbe représentée par l'équation (4) appartiennent en *général* à la courbe D.

En effet si, dans les équations (3), on remplace $x$ et $y$ par une solution $x = x'$, $y = y'$ de l'équation (4), les deux équations

$$f(x', y', \alpha) = 0 \qquad f_1(x', y', \alpha) = 0$$

ainsi formées auront une racine commune $\alpha = \alpha'$; à cette valeur $\alpha = \alpha'$ correspondront deux courbes A' et B' ayant pour équations

$$f(x, y, \alpha') = 0 \qquad f_1(x, y, \alpha') = 0;$$

ces deux courbes se couperont au point $C'(x', y')$; donc ce point appartiendra à la courbe D.

La réciproque peut être en défaut dans trois cas principaux que nous allons signaler.

**Premier cas d'exception.** — *Pour tous les points d'un arc de la courbe représentée par l'équation* (4), *les équations* (3) *donnent pour* $\alpha$ *des valeurs imaginaires.*

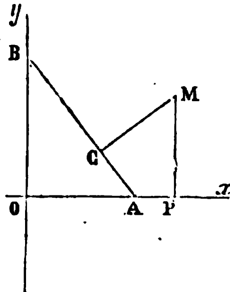
Dans ce cas, les courbes A et B qui correspondent à ces valeurs du paramètre $\alpha$ sont imaginaires, et leurs points de rencontre, bien que réels, ne font véritablement plus partie du lieu considéré au point de vue de sa définition géométrique.

**Remarque.** — Quand, pour $x = x'$, $y = y'$, les équations (3) ont une racine simple commune, cette racine est forcément réelle,

puisqu'elle est donnée par une équation du premier degré. Il résulte de là que l'exception signalée pourra seulement se présenter quand, pour $x=x', y=y'$, les équations (3) auront plusieurs racines communes.

**Exemple.** — *Les extrémités* A *et* B *d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites rectangulaires* $ox$, $oy$, *trouver le lieu décrit par un point* M *invariablement lié à la droite.*

Pour fixer le point M par rapport à la droite AB, nous donnerons la distance $MC = c$ du point M à AB et les longueurs $CA = b$, $CB = a$ des segments CA, CB.




Prenons pour axes de coordonnées les deux directrices $ox$, $oy$; appelons $\varphi$ l'angle des deux directions $ox$, AB, et construisons le contour $o$PM des coordonnées $x$ et $y$ du point M.

Projetons maintenant orthogonalement sur $ox$ les deux chemins $o$PM, $o$BCM, et sur $oy$ les deux chemins $o$PM, $o$ACM; nous aurons les deux équations

$$(5)\qquad \begin{aligned} x &= -a\cos\varphi + c\sin\varphi \\ y &= b\sin\varphi - c\cos\varphi; \end{aligned}$$

on aura l'équation du lieu en éliminant $\varphi$ entre les équations (5).

De ces deux équations on tire

$$\sin\varphi = \frac{ay - cx}{ab - c^2} \qquad \cos\varphi = -\frac{bx - cy}{ab - c^2};$$

en portant ces valeurs dans l'équation $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, on trouve pour l'équation du lieu

$$(6)\qquad (ay - cx)^2 + (bx - cy)^2 = (ab - c^2)^2;$$

on verra plus tard que cette équation représente une ellipse.

Cherchons si chaque point de cette ellipse fait partie du lieu considéré au point de vue de sa définition géométrique.

Imaginons qu'on ait remplacé, dans les équations (5), $x$ et $y$ par les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse; elles donneront pour $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ des valeurs acceptables ; car, d'après l'équation (6), la somme des carrés de ces valeurs est égale à l'unité.

Tous les points de l'ellipse font donc partie du lieu.

Considérons maintenant le cas particulier où l'on a

$$ab - c^2 = 0;$$

on ne peut plus alors tirer des équations (5) les valeurs de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$; mais si entre ces équations on élimine $\sin\varphi$, la quantité $\cos\varphi$ disparaît à cause de la relation $ab - c^2 = 0$.

Le lieu est alors la droite ayant pour équation

$$bx - cy = 0.$$

Il est bien évident que tous les points de cette droite ne peuvent pas appartenir au lieu, puisque, d'après sa définition, il est nécessairement limité.

Pour expliquer ce résultat, remarquons que les équations (5) se réduisent à une quand on y remplace $x$ et $y$ par les coordonnées $x_1, y_1$ d'un point de la droite; la valeur de l'angle $\varphi$ qui correspond à ce point sera donc donnée par l'équation

$$-a\cos\varphi + c\sin\varphi = x_1.$$

Pour résoudre cette équation, posons

$$a = \rho\cos\alpha \qquad c = \rho\sin\alpha,$$

d'où

$$\rho = \sqrt{a^2 + c^2};$$

nous obtiendrons l'équation

$$-\rho\cos(\varphi + \alpha) = x_1$$

d'où

$$\cos(\varphi + \alpha) = -\frac{x_1}{\rho};$$

pour que l'angle $\varphi$ soit réel, il faut que l'on ait $x_1^2 < \rho^2$, c'est-à-dire

$$\left(x_1 - \sqrt{a^2 + c^2}\right)\left(x_1 + \sqrt{a^2 + c^2}\right) < 0.$$

Les seuls points de la droite D qui répondent au problème proposé sont donc ceux qui sont compris entre les deux droites ayant pour équations

$$x = \sqrt{a^2 + c^2} \qquad x = -\sqrt{a^2 + c^2}.$$

**Remarque.** — La relation $c^2 = ab$ exprime que le point M est

situé sur la circonférence décrite sur AB comme diamètre ; chaque point de cette circonférence décrit donc un segment de droite.

**Second cas d'exception.** — *Pour des points particuliers de la courbe représentée par l'équation* (4), *les équations* (3) *donnent pour* $\alpha$ *des valeurs imaginaires.*

Dans ce cas, les courbes A et B qui se coupent en ces points particuliers sont imaginaires, et ces points ne font plus partie du lieu.

**Exemple.** — On appelle *podaire* d'une courbe le lieu des projections d'un point fixe P sur les tangentes à cette courbe.

Nous choisirons comme exemple du cas exceptionnel que nous venons de signaler la podaire d'une circonférence.

Prenons pour axe des $x$ le diamètre $o$P et pour axe des $y$ le diamètre perpendiculaire sur $o$P; appelons $a$ l'abscisse du point P.

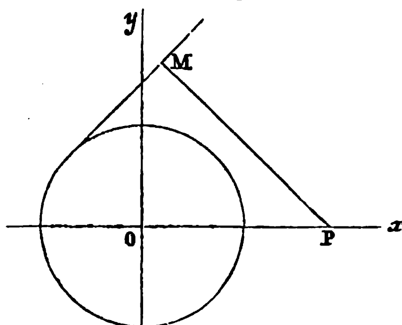


Fig. 80.

Le point de contact de la tangente ne jouant aucun rôle dans le problème proposé, nous prendrons l'équation de la tangente en fonction du coefficient angulaire

(7) $y = mx \pm R\sqrt{1+m^2}$,

et nous y joindrons l'équation de la perpendiculaire PM

(8) $$y = -\frac{1}{m}(x-a).$$

On aura l'équation du lieu en éliminant $m$ entre les équations (7) et (8). De l'équation (8) on tire

$$m = -\frac{x-a}{y};$$

portons cette valeur dans l'équation (7) rendue rationnelle, c'est-à-dire dans l'équation

($7^{bis}$) $$(y - mx)^2 = R^2(1+m^2);$$

nous trouverons pour l'équation du lieu

$$(x^2+y^2-ax)^2 = R^2[(x-a)^2+y^2].$$

Cette courbe passe par le point P; à tout point de la courbe autre que le point P correspond une *seule* valeur de $m$ satisfaisant aux équations (7) et (8), puisque cette valeur est donnée par l'équation (8) qui est du premier degré. Tous les points de la courbe autres que le point P font donc partie du lieu.

Pour le point P l'équation (8) est satisfaite, quel que soit $m$; il faut alors, pour déterminer $m$, recourir à l'équation ($7^{bis}$) qui devient

$$m^2(a^2 - R^2) = R^2.$$

On obtient pour $m$ deux valeurs qui sont imaginaires quand le point P est intérieur à la circonférence.

Ainsi quand le point P est intérieur à la circonférence, il n'appartient plus au lieu. Ce résultat est facile à comprendre, car tous les points du lieu étant situés sur des tangentes doivent être extérieurs à la circonférence.

**Remarque.** — L'équation du lieu prend une forme très simple en coordonnées polaires.

Transportons d'abord l'origine au point P, notre équation devient

$$(x^2 + y^2 + ax)^2 = R^2(x^2 + y^2).$$

Passons maintenant aux coordonnées polaires en prenant pour pôle le point P et pour axe polaire le diamètre $o$P, nous obtiendrons l'équation

$$\rho = -a\cos\omega \pm R.$$

Cette équation montre que le lieu s'obtient en ajoutant et retranchant R aux rayons vecteurs de la courbe C qui a pour équation

$$\rho = -a\cos\omega.$$

En revenant aux coordonnées rectilignes, cette équation devient

$$x^2 + y^2 + ax = 0.$$

La courbe C est donc la circonférence décrite sur $o$P comme diamètre, et le lieu est une *conchoïde de circonférence*, le pôle P étant sur la circonférence.

Cette courbe est aussi connue sous le nom de *Limaçon de Pascal*.

**Troisième cas d'exception.** — *La réciproque est encore en*

*défaut même lorsque le paramètre $\alpha$ est réel, si ce paramètre, d'après la nature du problème, ne peut pas prendre toutes les valeurs réelles imaginables.*

**Exemple.** — *Étant donnés une circonférence et un point* P, *trouver le lieu des milieux des cordes qui passent par le point* P.

Prenons pour axe des $x$ le diamètre $o$P et pour axe des $y$ le diamètre perpendiculaire sur $o$P ; soit de plus $a$ l'abscisse du point P.

L'équation de la circonférence et celle d'une corde passant par le point P seront

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$
$$(9) \quad y = m(x - a).$$

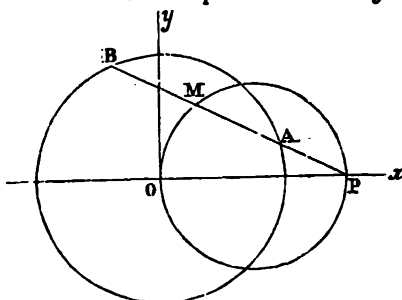



Fig. 81.

Les abscisses des points A, B où la corde rencontre la circonférence sont données par l'équation

$$(1 + m^2)x^2 - 2m^2ax + m^2a^2 - R^2 = 0.$$

L'abscisse $x$ du point milieu M de AB est égale à la demi-somme des abscisses des points A et B, on a donc

$$(10) \qquad x = \frac{m^2a}{1 + m^2}.$$

Les coordonnées du point M satisfaisant aux équations (9) et (10), on obtiendra l'équation du lieu en éliminant $m$ entre ces deux équations, ce qui donne

$$(x - a)(x^2 + y^2 - ax) = 0.$$

Laissons d'abord de côté la solution $x - a = 0$ que nous expliquerons tout à l'heure, nous aurons à considérer l'équation

$$x^2 + y^2 - ax = 0,$$

qui représente la circonférence décrite sur $o$P comme diamètre.

A tout point de cette circonférence correspond une valeur réelle de $m$ donnée par l'équation (9) ; il est vrai que pour le point P$(a, 0)$ l'équation (9) est satisfaite identiquement et il faut

alors recourir à l'équation (10) qui nous montre que le coefficient angulaire $m$ est infini. D'ailleurs les valeurs de $m$ qui deviennent infinies sont réelles, car de l'équation (10) on tire

$$m^2 = \frac{x}{a-x},$$

et l'équation de la circonférence mise sous la forme $y^2 = x(a-x)$ montre que le quotient $\frac{x}{a-x}$ est positif.

Il semble donc que tous les points de la circonférence $o$P font partie du lieu ; cependant cette conclusion est évidemment inexacte quand P est en dehors de la circonférence donnée, car tous les points du lieu doivent être intérieurs à cette circonférence.

Pour expliquer cette difficulté, il suffit de remarquer que, quand le point P est extérieur à la circonférence donnée, le coefficient angulaire $m$ doit rester compris entre les coefficients angulaires des tangentes menées par le point P à cette circonférence ; l'arc de la circonférence $o$P compris entre ces deux tangentes fait seul partie du lieu.

**Remarque.** — Reprenons la solution

$$x - a = 0,$$

cette équation représente la perpendiculaire menée par le point P au diamètre $o$P.

Pour expliquer cette solution, remarquons que nous avons, en réalité, cherché le lieu des points tels que leur abscisse est égale à la demi-somme des abscisses des points A, B ; or, quand la corde AB est perpendiculaire sur le diamètre $o$P, les points A et B ont pour abscisse commune $a$ ; par suite, l'abscisse d'un point quelconque de cette corde est égale à la demi-somme des abscisses des points A et B. On comprend dès lors que la corde perpendiculaire au diamètre $o$P doit être une solution du problème que nous avons substitué au problème proposé.

**Remarque.** — Cette remarque se rapporte au cas où l'une des courbes A ou B passe, quel que soit $\alpha$, par un point fixe I $(x_0, y_0)$.

Dans ce cas le point I fait partie du lieu.

En effet, si toutes les courbes A passent par le point I, l'équation

$$f(x_0, y_0, \alpha) = 0,$$

est satisfaite, quel que soit $\alpha$. En exprimant que les courbes B

passent par le point I, on aura, pour déterminer $\alpha$, l'équation

(11) $$f_1(x_0, y_0, \alpha) = 0.$$

Soit $\alpha'$ une racine de cette équation, les courbes A', B' qui correspondent à la valeur $\alpha = \alpha'$ se couperont au point I ; donc le point I fait partie du lieu.

Il y a exception si l'équation (11) ne donne pour $\alpha$ que des valeurs imaginaires.

Si cette équation donne $p$ valeurs pour $\alpha$, il y aura $p$ arcs de courbes passant par le point I qui sera un point multiple d'ordre $p$.

**Marche à suivre dans la recherche d'un lieu géométrique.** — On commencera par choisir les axes de coordonnées : pour cela, on fera rapidement une étude géométrique du problème proposé; cette étude mettra généralement en évidence des droites ayant quelques propriétés remarquables ; on prendra deux de ces droites pour axes des coordonnées.

Les axes étant choisis, il faut mettre le problème en équation, c'est-à-dire trouver les équations des deux courbes A et B qui, par leur intersection, déterminent les points du lieu.

Cette mise en équation peut être facilitée par la règle suivante :

**Règle.** — *On examinera les lignes qu'il faut successivement tracer pour construire un point du lieu, puis on écrira les équations de chacune d'elles.*

*On obtiendra ainsi des équations entre les données, des paramètres auxiliaires et les coordonnées $x, y$ d'un point du lieu. On aura l'équation du lieu en éliminant les paramètres auxiliaires.*

Soient

(12) $$f(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p) = 0 \qquad f_1(x, y, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p) = 0$$

les équations des deux courbes A et B, obtenues en appliquant cette règle ; pour que, par leur intersection, ces courbes définissent un lieu géométrique, il faut qu'un seul des $p$ paramètres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ reste arbitraire.

En effet, si deux de ces paramètres restaient arbitraires, on pourrait faire passer les courbes A et B par un point quelconque du plan.

Il résulte de cette remarque que les $p$ paramètres doivent être liés par $p-1$ équations de conditions

(13) $$\varphi_1 = 0 \qquad \varphi_2 = 0 \qquad \varphi_{p-1} = 0.$$

On démontrera comme on l'a fait dans le cas où les équations des courbes A et B ne contiennent qu'un seul paramètre que, pour obtenir l'équation du lieu, il faut éliminer les $p$ paramètres entre les équations (12) et (13).

## RECHERCHE DE QUELQUES LIEUX GÉOMÉTRIQUES.

**95. Problème I.** — *Trouver le lieu des projections d'un point* P *sur toutes les cordes d'une circonférence vues du point* P *sous un angle droit.*

Cherchons d'abord la condition nécessaire et suffisante pour qu'une corde AB soit vue du point P sous un angle droit.

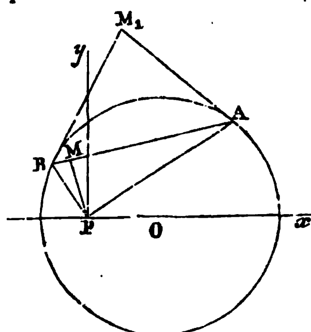


Fig. 82.

Nous prendrons pour axe des $x$ le diamètre PO, et pour axe des $y$ une perpendiculaire menée par le point P à ce diamètre.

En représentant par $d$ l'abscisse du centre O, l'équation de la circonférence sera

$$(14)\quad x^2+y^2-2dx+d^2-R^2=0.$$

Soit

$$(15)\qquad ux+vy=1$$

l'équation de la corde AB; l'équation du faisceau de droites PA, PB sera

$$x^2+y^2-2dx(ux+vy)+(d^2-R^2)(ux+vy)^2=0.$$

La relation qui exprime que ces deux droites sont rectangulaires est

$$(16)\qquad (d^2-R^2)(u^2+v^2)-2du+2=0.$$

Maintenant l'équation de la perpendiculaire PM sur la corde AB est

$$(17)\qquad \frac{x}{u}=\frac{y}{v},$$

on aura l'équation du lieu en éliminant les paramètres $u$ et $v$ entre les équations (15) (16) et (17).

Pour faciliter cette élimination, profitons de l'équation (15) pour

rendre l'équation (16) homogène par rapport à $u$ et $v$; l'équation (16) ainsi transformée devient

$$(d^2-R^2)(u^2+v^2)-2du(ux+vy)+2(ux+vy)^2=0;$$

il suffira maintenant d'y remplacer $u$ et $v$ par les quantités $x$ et $y$ auxquelles ces paramètres sont proportionnels d'après l'équation (17). L'équation du lieu est donc

$$(d^2-R^2)(x^2+y^2)-2dx(x^2+y^2)+2(x^2+y^2)^2=0.$$

Cette équation se décompose en deux: l'une,

$$x^2+y^2=0,$$

donne le point P par lequel passe toujours la droite PM qui par son intersection avec la corde AB détermine le point M ; l'autre,

$$x^2+y^2-dx+\frac{d^2-R^2}{2}=0,$$

peut être écrite de la manière suivante:

$$\left(x-\frac{d}{2}\right)^2+y^2=\frac{2R^2-d^2}{4}.$$

Elle représente une circonférence ayant son centre au milieu de PO et pour rayon $\frac{1}{2}\sqrt{2R^2-d^2}$.

Pour que le lieu soit réel, il faut que le point P soit intérieur à la circonférence ayant pour centre le point O et pour rayon $R\sqrt{2}$. On sait que cette circonférence est le lieu des sommets des angles droits circonscrits à la circonférence O; quand le point P sera extérieur à la première circonférence, si de ce point on mène à la circonférence O une tangente PH, la perpendiculaire élevée par le point P sur cette tangente ne rencontrera pas la circonférence O ; il n'y aura donc aucune corde *réelle* vue du point P sous un angle droit, et l'on comprend que le lieu devienne alors imaginaire.

Reprenons la solution

$$x^2+y^2=0;$$

pour l'expliquer, nous avons seulement fait remarquer que le point P doit appartenir au lieu, parce que la droite PM passe toujours par le point P. Cette explication est incomplète, car elle

ne montre pas pourquoi le point P est ici défini par l'équation $x^2+y^2=0$ et non par une équation d'une autre forme, telle que

$$\alpha^2x^2+\beta^2y^2=0,$$

par exemple.

La solution que nous avons rencontrée se présentant dans un grand nombre de problèmes, il ne sera pas inutile d'exposer les considérations qui permettent d'expliquer complètement cette solution.

## DROITES IMAGINAIRES. — DROITES ISOTROPES.

Quand l'équation d'une droite contient un ou plusieurs coefficients imaginaires, on dit que cette équation représente une droite imaginaire.

Les droites imaginaires qui ont pour coefficient angulaire $\pm i$, les coordonnées étant rectangulaires, sont dites *isotropes*.

Le système des droites isotropes menées par l'origine a pour équation

$$(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2=0,$$

en coordonnées rectangulaires et

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+2xy\cos\theta\\&\quad=[x+y(\cos\theta+i\sin\theta)][x+y(\cos\theta-i\sin\theta)]=0,\end{aligned}$$

en coordonnées obliques.

Ainsi on obtient l'équation des deux droites *isotropes* menées par l'origine en égalant à zéro l'ensemble des termes du second degré dans l'équation de la circonférence.

Les droites isotropes jouissent de trois propriétés importantes.

**Théorème I.** — *Une droite isotrope est perpendiculaire sur elle-même.*

En effet, le coefficient angulaire $i$, par exemple, d'une des droites isotropes satisfait à la relation

$$1+i.i=0.$$

**Théorème II.** — *La distance de deux points quelconques pris sur une droite isotrope est nulle.*

Soient en effet $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ les coordonnées de deux points situés sur la droite qui a pour équation

$$x+yi=0,$$

on aura $x_1 = -iy_1$, $x_2 = -iy_2$, et l'expression *analytique* de la distance des deux points sera

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = i^2 (y_1 - y_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = 0.$$

**Théorème III.** — *L'expression analytique de la tangente de l'angle* V *que fait une droite isotrope avec elle-même prend la forme illusoire* $\frac{0}{0}$.

En effet, si dans la relation

$$\text{tang V} = \frac{a - a'}{1 + aa'}$$

on suppose $a = a' = \pm i$, l'expression de tang V prend la forme illusoire $\frac{0}{0}$.

**Remarque.** — Il importe de bien comprendre le sens des théorèmes précédents; ils expriment non pas un fait géométrique, mais une propriété analytique.

Le second théorème, par exemple, montre que l'on obtient un résultat nul en appliquant aux coordonnées de deux points imaginaires, situés sur une droite isotrope, la formule qui exprime la distance de deux points réels.

Les considérations précédentes vont nous permettre d'expliquer pourquoi, en appliquant l'algèbre à la résolution du **Problème I**, on a trouvé la solution

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Menons par le point P une corde AB parallèle à l'une des droites isotropes; les droites PA, PB joignant le point P aux points A et B où la corde rencontre la circonférence, se confondront avec cette corde, donc (**Th. I**) ces droites qui ont toutes deux pour coefficients angulaires soit $i$, soit $-i$ seront *analytiquement* perpendiculaires.

D'un autre côté, la perpendiculaire abaissée du point P sur la corde AB se confondra avec cette corde; par suite, tous les points de la corde AB font partie du lieu proposé au point de vue *analytique*. On comprend dès lors pourquoi l'algèbre a donné la solution

$$x^2 + y^2 = 0.$$

**Problème II.** — *Trouver le lieu des points de rencontre* $M_1$ *des*

*tangentes menées à une circonférence par les extrémités d'une corde* AB *vue d'un point* P *sous un angle droit.*

Conservons les mêmes axes et les mêmes données que dans le problème précédent; l'équation rendue homogène de la circonférence sera

$$(x-dz)^2+y^2-R^2z^2=0.$$

Si donc on appelle $(x_0, y_0)$ les coordonnées du point de concours $M_1$ des tangentes, la corde de contact AB aura pour équation

$$x(x_0-d)+yy_0-d(x_0-d)-R^2=0.$$

L'ensemble des deux droites PA, PB sera représenté par l'équation du second degré

$$x^2+y^2-2dx\frac{x(x_0-d)+yy_0}{d(x_0-d)+R^2}$$
$$+(d^2-R^2)\left[\frac{x(x_0-d)+yy_0}{d(x_0-d)+R^2}\right]^2=0.$$

En exprimant que ces deux droites sont rectangulaires, on obtient entre les coordonnées $(x_0, y_0)$ la relation

$$2-2d\frac{x_0-d}{d(x_0-d)+R^2}+(d^2-R^2)\frac{(x_0-d)^2+y_0^2}{[d(x_0-d)+R^2]^2}=0.$$

En transportant l'origine au point O et réduisant, cette relation devient

$$x_0^2+y_0^2+2\frac{dR^2}{d^2-R^2}x_0+\frac{2R^4}{d^2-R^2}=0.$$

Cette équation représente une circonférence dont le centre est sur le diamètre PO en un point qui a pour abscisse $-\frac{dR^2}{d^2-R^2}$; le rayon $\rho$ de cette circonférence est donné par la relation

$$\rho^2=\frac{d^2R^4}{(d^2-R^2)^2}-\frac{2R^4}{d^2-R^2}=\frac{R^4}{(d^2-R^2)^2}(2R^2-d^2).$$

Pour que le lieu soit réel, il faut encore que l'on ait: $d^2<2R^2$.

**Problème III.** — *Étant donné un triangle* ABA′, *par un point fixe o pris sur le côté* AA′ *on mène une sécante mobile qui rencontre les côtés* BA, BA′ *aux points* C *et* C′: *trouver le lieu des*

*points de rencontre* M *des circonférences circonscrites aux triangles variables* $oAC$, $oA'C'$.

Prenons pour axe des $x$ la droite $oA'$ et pour axe des $y$ une perpendiculaire élevée sur cette droite par le point $o$.

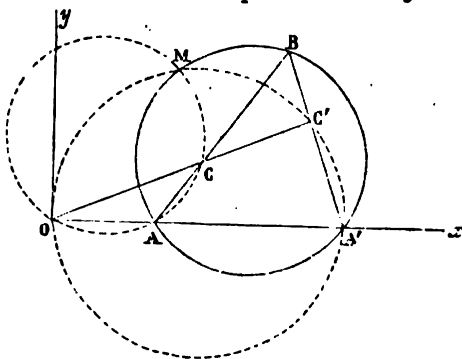


Fig. 83.

Appelons $a$, $a'$ les abscisses des points A, A' et soient

$$y = c(x - a)$$
$$y = c'(x - a')$$

les équations des côtés AB, A'B et

$$y = mx$$

celle de la sécante $oCC'$.

Les coordonnées du point C, intersection des droites AB, $oC$, seront

$$x = \frac{ca}{c - m} \quad y = \frac{mca}{c - m}$$

D'un autre côté, l'équation générale des circonférences passant par les points $o$ et A est

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0.$$

On déterminera le coefficient inconnu $b$ en exprimant que cette circonférence passe par le point C, ce qui donne

$$b = \frac{a(cm + 1)}{c - m}.$$

La circonférence circonscrite au triangle $oAC$ a donc pour équation

$$(18) \qquad x^2 + y^2 - ax - a\frac{cm + 1}{c - m}y = 0.$$

En remplaçant dans cette équation $a$ et $c$ par $a'$ et $c'$, on obtiendra l'équation de la circonférence circonscrite au triangle $oA'C'$

$$(19) \qquad x^2 + y^2 - a'x - a'\frac{c'm + 1}{c' - m}y = 0.$$

Pour avoir l'équation du lieu des points M, il faut éliminer $m$ entre les équations (18) et (19). On obtient ainsi l'équation

$$\frac{c(x^2+y^2-ax)-ay}{x^2+y^2-ax+acy}=\frac{c'(x^2+y^2-a'x)-a'y}{x^2+y^2-a'x+a'c'y},$$

qui, mise sous forme entière, devient

$$\begin{aligned} &c(x^2+y^2-ax)(x^2+y^2-a'x+a'c'y)-ay(x^2+y^2-a'x+a'c'y) \\ &=c'(x^2+y^2-a'x)(x^2+y^2-ax+acy)-a'y(x^2+y^2-ax+acy). \end{aligned}$$

Effectuons les calculs et groupons ensemble les termes qui contiennent $x^2+y^2$ en facteur, nous aurons

$$\begin{aligned} &(x^2+y^2)[c(x^2+y^2-a'x+a'c'y)-acx-ay]+acx(a'x-a'c'y)+ay(a'x-a'c'y) \\ &=(x^2+y^2)[c'(x^2+y^2-ax+acy)-a'c'x-a'y]+a'c'x(ax-acy)+a'y(ax-acy). \end{aligned}$$

ou bien

$$(x^2+y^2)\{(c-c')[x^2+y^2-(a+a')x+aa']+(a'-a)(1+cc')y\}=0.$$

Cette équation se décompose en deux; l'une,

$$x^2+y^2=0,$$

représente le point $o$ par lequel passent toujours les deux circonférences mobiles; l'autre,

$$x^2+y^2-(a+a')x-(a-a')\frac{1+cc'}{c-c'}y+aa'=0,$$

représente une circonférence.

Il est facile de vérifier géométriquement que cette circonférence est circonscrite au triangle BAA'.

En effet, quand la sécante mobile passe par le point B, les deux circonférences variables se coupent au point B, qui doit dès lors faire partie du lieu.

Quand la sécante est parallèle au côté AB, le point C s'éloigne à l'infini, et l'une des circonférences se réduit à la droite $o$A; cette droite rencontrant en A' l'autre circonférence, ce point fait partie du lieu; on voit de même que le point A fait partie du lieu.

Cherchons maintenant à expliquer pourquoi on a obtenu la solution

$$x^2+y^2=0.$$

Pour cela, menons par le point $o$ une sécante parallèle à l'une des droites isotropes, à celle qui a pour équation

$$x+yi=0,$$

par exemple. Cette droite rencontrera les côtés AB, A'B du triangle en des points imaginaires que nous désignerons encore par C et C'. D'un autre côté, si, dans l'équation générale de la circonférence

$$x^2 + y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0,$$

on remplace $x$ par $-yi$, on obtient une équation du premier degré

$$2(E_1 - D_1i)y + F_1 = 0.$$

Il en résulte que toute droite isotrope rencontre une circonférence *quelconque* en un point rejeté à l'infini; la sécante isotrope considérée aura donc avec la circonférence qui passe par les points $o$, A, C trois points communs, savoir, $o$, C et un point à l'infini; par suite, cette circonférence se composera de la sécante isotrope et d'une autre droite passant par le point A. Pour la même raison, la circonférence qui passe par les points $o$, A', C' se composera de la même sécante isotrope et d'une droite passant par le point A'. Les deux circonférences ayant en commun la sécante isotrope, leur intersection se compose de cette sécante, qui doit dès lors faire partie du lieu au point de vue *analytique;* il en est de même de la sécante qui a pour équation

$$x - yi = 0.$$

En résumé, la solution *analytique* du problème doit comprendre les droites qui ont pour équations

$$x + yi = 0 \qquad x - yi = 0,$$

et la solution trouvée

$$x^2 + y^2 = 0,$$

se trouve expliquée complètement.

## EXERCICES.

1. Lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances à $n$ points donnés respectivement multipliés par des constantes données $m_1$, $m_2$,... soit constante.

2. Étant données deux circonférences, on imagine deux circonférences variables tangentes entre elles et aux précédentes; trouver le lieu des points de contact des circonférences variables.

3. On prend sur une première droite deux points A et B et sur une seconde

droite deux points $a$ et $b$. Soit S le point de rencontre des droites $Aa$, $Bb$; si l'on fait tourner la seconde droite $ab$ autour du point $o$ où elle rencontre la première:

1° Le point S décrit une circonférence;

2° La droite menée par le point S parallèlement à la droite mobile $ab$ passe par un point fixe.

4. D'un point donné A on mène des tangentes à une série de circonférences ayant le même axe radical; trouver le lieu des milieux des cordes de contact.

5. Lieu des centres des circonférences qui coupent deux circonférences données, en des points diamétralement opposés.

6. Lieu des centres des circonférences qui coupent deux circonférences données, de telle sorte que les cordes communes soient rectangulaires.

7. Deux circonférences se coupent en deux points; par l'un des points communs, on mène deux droites rectangulaires quelconques qui coupent la première circonférence aux points A et B, et la seconde aux points A' et B'; trouver le lieu des points de rencontre des droites AB, A'B'.

8. Étant données deux circonférences qui se coupent, on mène par l'un des points d'intersection une sécante qui rencontre la circonférence $o$ au point B et la circonférence $o'$ au point B'. On joint le point B au centre de la circonférence $o$ et le point B' au centre de la circonférence $o'$; trouver le lieu des points de rencontre des lignes de jonction.

9. Sur le côté BC d'un triangle ABC, on prend un point $o$, et l'on fait passer des circonférences, l'une par les points $A, B, o$, l'autre par les points $A, C, o$; soient I et I' les centres de ces deux circonférences. On propose:

1° De démontrer que le rapport des rayons de ces circonférences est indépendant de la position du point $o$ sur le côté BC;

2° De déterminer la position que doit occuper le point $o$ pour que les deux rayons aient la plus petite longueur possible;

3° De démontrer que le triangle AII' est semblable au triangle ABC;

4° De trouver le lieu décrit par le point M, qui divise le segment II' dans le rapport de deux longueurs données $\alpha$ et $\beta$.

10. On donne deux droites parallèles et un point A sur l'une d'elles. Par le point A, on mène une sécante faisant avec les parallèles un angle $\alpha$ et rencontrant la seconde parallèle au point P; au point P, on élève sur AP une perpendiculaire PQ qui rencontre la première parallèle au point Q; enfin, par le point Q, on mène une droite faisant avec les parallèles un angle $2\alpha$, et l'on projette en M le point A sur cette dernière droite. Trouver le lieu décrit par le point M, quand on fait varier l'angle $\alpha$.

11. On donne une circonférence S, un triangle inscrit ABC et deux points P et P' sur la circonférence S.

1° Démontrer que le point de rencontre M des droites de Simson relatives aux points P et P' et au triangle ABC décrit une circonférence S', quand le sommet C du triangle se meut sur la circonférence S, les points A, B, P, P' restant fixes;

2° Trouver le lieu décrit par le centre de la circonférence S', lorsque, en laissant fixes les points A et B, on fait mouvoir les points P et P' sur la circonférence S, de telle sorte que l'arc P P' conserve une longueur constante.

12. Quatre points A, B, C, D étant donnés sur une droite, on décrit sur AB et sur CD deux segments capables d'un même angle variable; trouver le lieu du milieu de la corde commune à ces deux circonférences.

13. On donne deux circonférences $o$ et $o'$ tangentes entre elles; par le point de contact A, on mène dans la première une corde quelconque AB, et dans la seconde une corde AC perpendiculaire sur AB; on joint BC.

Cela posé, on demande:

1° Le lieu décrit par la projection du point A sur BC ;

2° Le lieu du milieu de l'hypoténuse BC.

14. Trouver le lieu géométrique du point de rencontre des hauteurs des triangles MBC pour lesquels les sommets B et C sont fixes et l'angle BMC constant; trouver le lieu géométrique des circonférences tangentes aux côtés des mêmes triangles.

15. Étant donnés trois points A, B, C en ligne droite, on fait passer par les points A et B des circonférences qui rencontrent aux points D et D' la perpendiculaire élevée sur le milieu de AB; trouver le lieu géométrique des points où les circonférences rencontrent les sécantes CD, CD'.

16. Lieu des centres des circonférences qui coupent trois circonférences données sous des angles égaux.

17. On donne deux droites rectangulaires $ox$, $oy$ et un point P sur l'une d'elles $oy$; par le point P, on mène des sécantes rencontrant $ox$ au point A, et sur chacune d'elles on prend, à partir du point P, des longueurs $PM = oA$; trouver le lieu des points M.

18. Un angle droit tourne autour de son sommet placé au centre $o$ d'une circonférence donnée; on joint à un point fixe P le point A où l'un des côtés de l'angle droit rencontre la circonférence; trouver le lieu des points où la ligne de jonction rencontre le second côté de l'angle droit.

# LIVRE III

## CHAPITRE PREMIER

### CLASSIFICATION DES COURBES DU SECOND ORDRE.

**96.** L'équation générale du second ordre à deux variables est de la forme

$$(1) \qquad Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Dans tout ce qui suit, nous représenterons par $\varphi(x,y)$ l'ensemble des termes du second degré; nous poserons donc

$$\varphi(x,y) = Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy.$$

En désignant par $f(x,y)$ le premier membre de l'équation (1), nous aurons l'identité

$$f(x_0 + \rho\alpha, y_0 + \rho\beta) \equiv \rho^2\varphi(\alpha, \beta) + \rho(\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0}) + f(x_0, y_0),$$

dont nous ferons souvent usage.

**Définition.** — Lorsque toute parallèle à une direction D rencontre une courbe en un point rejeté à l'infini, on dit que la direction D est une *direction asymptotique*.

Nous classerons les courbes du second ordre d'après le nombre des directions asymptotiques réelles.

Soient $\alpha$ et $\beta$ les coefficients de direction d'une droite D; une parallèle à cette droite sera représentée par l'équation

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \rho.$$

Les valeurs de $\rho$, qui correspondent aux points où cette parallèle rencontre la courbe du second ordre représentée par l'équation (1), sont données par l'équation :

$$\rho^2\varphi(\alpha, \beta) + \rho(\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0}) + f(x_0, y_0) = 0;$$

l'un des deux points de rencontre sera rejeté à l'infini si l'on a $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, c'est-à-dire

$$A\alpha^2 + 2B\alpha\beta + C\beta^2 = 0. \tag{2}$$

Nous distinguerons trois cas :

1° $B^2 - AC < 0$. — L'équation (2) donne pour $\frac{\beta}{\alpha}$ deux valeurs imaginaires, et les courbes n'ont pas de direction asymptotique réelle; elles forment le *genre Ellipse.*

2° $B^2 - AC > 0$. — L'équation (2) donne pour $\frac{\beta}{\alpha}$ deux valeurs réelles distinctes, les courbes représentées par l'équation (1) ont deux directions asymptotiques réelles; elles forment le *genre Hyperbole.*

3° $B^2 - AC = 0$. — L'équation (2) donne pour $\frac{\beta}{\alpha}$ deux valeurs réelles égales entre elles, les courbes représentées par l'équation (1) n'admettent qu'une seule direction asymptotique; elles forment le *genre Parabole.*

En résumé, l'équation du second degré peut représenter trois genres de courbes :

| | | |
|---|---|---|
| 1° **Genre Ellipse** | caractérisé par la relation | $B^2 - AC < 0$ |
| 2° **Genre Hyperbole** | caractérisé par la relation | $B^2 - AC > 0$ |
| 3° **Genre Parabole** | caractérisé par la relation | $B^2 - AC = 0.$ |

**Remarque I.** — La relation $B^2 - AC = 0$ exprime que l'ensemble des termes du second degré $\varphi(x, y)$ forme un carré parfait ; l'équation générale des courbes du genre parabole a donc la forme suivante :

$$(ax + by)^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

**Remarque.** — Nous désignerons par $\delta$ le binôme $B^2 - AC$.

Nous allons maintenant chercher quelles sont les courbes renfermées dans les trois genres dont nous venons de reconnaître l'existence.

**Genre Ellipse.** $\delta = B^2 - AC < 0.$

**97.** La relation $B^2 - AC < 0$ montre qu'aucun des coefficients A et C ne peut être nul; l'équation (1) contiendra donc à

la fois un terme en $x^2$ et un terme en $y^2$; de plus, les coefficients de ces deux termes seront de ***même signe***.

En résolvant l'équation (1) par rapport à $y$, on a

$$y = ax + b \pm \frac{1}{C}\sqrt{\delta x^2 + 2px + q},$$

en posant

$$a = -\frac{B}{C} \quad b = -\frac{E}{C} \quad \delta = B^2 - AC \quad p = BE - CD \quad q = E^2 - CF.$$

Construisons la droite DD' qui a pour équation

$$y_1 = ax + b,$$

et posons

$$Y = \frac{1}{C}\sqrt{\delta x^2 + 2px + q};$$

il en résultera

$$(3) \qquad y = y_1 \pm Y.$$

L'équation (3) nous montre qu'on obtiendra les points de la courbe en ajoutant et retranchant aux ordonnées de chaque point $m$ de la droite DD' des valeurs égales à celles que prend Y quand, dans l'expression de cette fonction, on remplace $x$ par l'abscisse du point $m$.

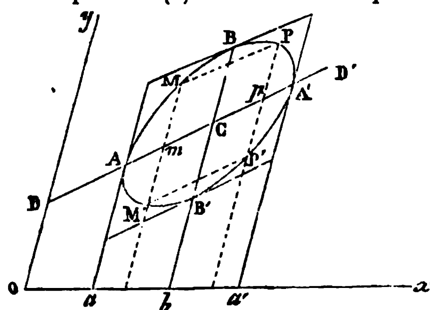


Fig. 84.

Il résulte de là que la droite DD' partage en deux parties égales toutes les cordes parallèles à $oy$; on dit que cette droite est un *diamètre* conjugué de la direction $oy$.

La même remarque nous montre que l'on est ramené à étudier la fonction Y que nous appellerons *ordonnée au diamètre*.

Pour mettre en évidence le signe du coefficient $\delta$, nous poserons $\delta = -\mu^2$, ce qui donne

$$Y = \frac{\mu}{C}\sqrt{-x^2 + \frac{2p}{\mu^2}x + \frac{q}{\mu^2}}.$$

L'ordonnée au diamètre ne sera réelle que si le trinôme placé

sous le radical est positif; nous désignerons par $x'$ et $x''$ les *zéros* de ce trinôme, et nous distinguerons trois cas:

1. *Les valeurs $x'$ et $x''$ sont réelles et inégales.* — On a

$$Y = \frac{\mu}{C}\sqrt{(x'-x)(x-x'')}.$$

Pour fixer les idées, soit $x' > x''$; l'abscisse $x$ devra rester comprise entre $x''$ et $x'$; donc la courbe sera elle-même comprise entre les droites $Aa$, $A'a'$, qui ont respectivement pour équation $x = x''$, $x = x'$. Quand $x$ varie de $x''$ à $x'$, l'ordonnée Y reste finie et part de la valeur zéro pour redevenir nulle; dans l'intervalle, cette ordonnée passe donc par un maximum. Pour déterminer ce maximum, remarquons que dans le produit $(x'-x)(x-x'')$, les deux facteurs sont positifs et ont une somme constante; par suite, Y sera maximum quand on aura

$$x' - x = x - x'', \quad \text{d'où} \quad x = \frac{x'+x''}{2}.$$

La valeur maximum de Y a pour expression $\frac{\mu(x'-x'')}{2C}$.

Par le point $b$ milieu de $aa'$, menons une ordonnée rencontrant au point C le diamètre DD'; puis, sur cette ordonnée, de part et d'autre de ce diamètre, prenons des longueurs

$$CB = CB' = \frac{\mu(x'-x'')}{2C};$$

enfin par les points B et B' menons des parallèles au diamètre DD'; elles formeront avec les droites $Aa$, $A'a'$ un parallèlogramme dans lequel la courbe sera tout entière comprise.

Aux points A, A', B, B' cette courbe touche les côtés du parallélogramme.

Par le point A, par exemple, menons une sécante qui rencontre la courbe au point M; quand cette sécante, en tournant autour du point A, viendra se confondre avec $Aa$, le point M coïncidera nécessairement avec le point A; car, sur la droite $Aa$, il n'y a pas de point de la courbe autre que A. La courbe touche donc au point A le côté $Aa$ du parallélogramme. Le même raisonnement peut être répété pour les points A', B, B'.

En résumé nous obtenons une courbe limitée dans tous les sens, à laquelle on a donné le nom d'*Ellipse*.

*Centre.* — *Diamètre conjugué du diamètre* DD'. — Considérons deux cordes MM', PP' parallèles à BB' et équidistantes de cette droite; les équations de ces cordes seront

$$x = \frac{x' + x''}{2} - \lambda \qquad x = \frac{x' + x''}{2} + \lambda.$$

Les ordonnées au diamètre des points M et M' ont pour expression

$$Y = \frac{\mu}{C}\sqrt{\left(\lambda + \frac{x' - x''}{2}\right)\left(\frac{x' - x''}{2} - \lambda\right)}.$$

Cette valeur ne change pas quand on y remplace $\lambda$ par $-\lambda$; donc les longueurs M$m$, M'$m$, P$p$, P'$p$ sont égales, et la figure MM'PP' est un parallélogramme. Il résulte de là: 1° que la droite BB' partage en deux parties égales toutes les cordes parallèles au diamètre DD'; 2° que le point C partage en deux parties égales toutes les cordes MP' qui passent par le point C.

Les deux diamètres BB', DD', tels que chacun d'eux partage en parties égales les cordes parallèles à l'autre, sont dits *conjugués*.

Le point C qui partage en parties égales les cordes passant par le point C est appelé *centre*.

2. *Les valeurs $x'$ et $x''$ sont égales.* — L'équation de la courbe devient alors

$$y = ax + b \pm \frac{\mu}{C}(x - x')i.$$

Les seules valeurs réelles de $x$ et de $y$ qui satisfont à cette équation sont:

$$x = x' \qquad y = ax' + b,$$

la courbe se réduit donc à un *point.*

3. *Les valeurs $x'$ et $x''$ sont imaginaires.* — Le trinôme

$$-x^2 + \frac{2p}{\mu^2}x + \frac{q}{\mu^2}$$

a, quel que soit $x$, le signe de son premier terme; par suite, Y est constamment imaginaire et l'équation (1) ne représente plus une courbe réelle; on dit que cette équation représente une *ellipse imaginaire.*

**Genre Hyperbole.** $\delta = B^2 - AC > 0$.

**98.** Dans ce cas, on peut avoir $C = 0$ avec $B \gtrless 0$, ou bien $A = 0$ avec $B \gtrless 0$; nous supposerons d'abord $C \gtrless 0$.

Comme pour le genre ellipse, on est ramené à étudier l'ordonnée au diamètre Y. Pour mettre en évidence le signe de la quantité $\delta$, nous poserons $\delta = \mu^2$, et nous aurons

$$Y = \frac{\mu}{C}\sqrt{x^2 + \frac{2p}{\mu^2}x + \frac{q}{\mu^2}}.$$

Nous désignerons toujours par $x'$ et $x''$ les *zéros* du trinôme $x^2 + \frac{2p}{\mu^2}x + \frac{q}{\mu^2}$, et nous distinguerons trois cas.

1. *Les valeurs $x'$ et $x''$ sont réelles et inégales.* — On a

$$Y = \frac{\mu}{C}\sqrt{(x - x')(x - x'')}.$$

Pour fixer les idées, soit $x' > x''$; pour que Y soit réel, il faut que l'abscisse $x$ ne soit pas comprise entre $x'$ et $x''$; donc la courbe n'aura aucun point entre les droites A$a$, A'$a'$ qui ont respectivement pour équation $x = x''$, $x = x'$.

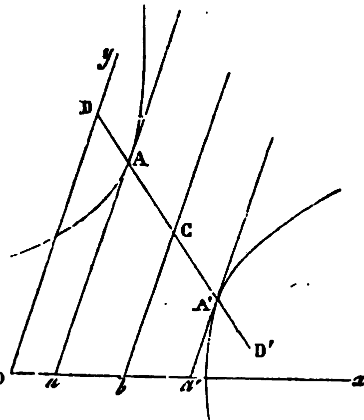


Fig. 85.

Quand $x$ varie de $x'$ à $+\infty$, l'ordonnée Y croît de zéro à l'infini; on a donc deux arcs de courbes partant du point A' et s'éloignant à l'infini de part et d'autre du diamètre DD' dans le sens des abscisses positives.

En faisant varier $x$ de $x''$ à $-\infty$ on obtient deux nouveaux arcs de courbes partant du point A et s'éloignant à l'infini de part et d'autre du diamètre DD' dans le sens des abscisses négatives.

On obtient donc une courbe composée de deux branches séparées et qui s'étendent à l'infini, l'une dans le sens des abscisses

positives, l'autre dans le sens des abscisses négatives; on lui a donné le nom d'*hyperbole*.

**Remarque.** — On démontre comme dans le cas de l'ellipse: 1° que la courbe touche les droites A$a$, A'$a'$ aux points A et A'; 2° que la droite $b$C équidistante des deux droites A$a$, A'$a'$ forme avec DD' un système de *diamètres conjugués;* 3° que le point C est *centre*.

2. *Les valeurs $x'$ et $x''$ sont imaginaires.* — L'ordonnée Y reste réelle quand $x$ varie de $-\infty$ à $+\infty$; de plus, cette ordonnée varie elle-même d'une manière continue de $+\infty$ à $+\infty$; par suite, elle passe par un minimum.

Pour déterminer ce minimum, nous mettrons l'expression de l'ordonnée Y sous la forme suivante :

$$Y = \frac{\mu}{C}\sqrt{\left(x+\frac{p}{\mu^2}\right)^2+\frac{q}{\mu^2}-\frac{p^2}{\mu^4}};$$

le terme $\frac{q}{\mu^2}-\frac{p^2}{\mu^4}$ est positif, puisque $x'$ et $x''$ sont des quantités imaginaires; Y acquiert donc sa valeur minimum $\frac{\mu}{C}\sqrt{\frac{q}{\mu^2}-\frac{p^2}{\mu^4}}$ pour $x = -\frac{p}{\mu^2}$.

Soit $a$ le point qui a pour abscisse $-\frac{p}{\mu^2}$; sur l'ordonnée $a$C prenons, à partir du diamètre DD' et de part et d'autre, des longueurs $CA = CA' = \frac{\mu}{C}\sqrt{\frac{q}{\mu^2}-\frac{p^2}{\mu^4}}$; enfin par les points A et A' menons des parallèles au diamètre DD', la courbe n'aura aucun point entre ces parallèles: on démontrera, comme dans le cas de l'ellipse, que la courbe touche ces parallèles aux points A et A'.

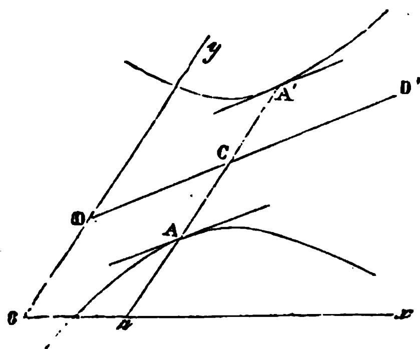


Fig. 86.

La courbe est composée de deux branches séparées et qui s'étendent à l'infini, l'une dans le sens des ordonnées positives, l'autre dans le sens des ordonnées négatives; cette courbe est encore une *Hyperbole*.

**Remarque.** — En coupant la courbe par les deux droites qui ont pour équation

$$x = -\frac{p}{\mu^2} + \lambda \qquad x = -\frac{p}{\mu^2} - \lambda,$$

on démontrera, comme dans le cas de l'ellipse, que les deux droites AA′, DD′ forment un système de *diamètres conjugués* et que le point C est un *centre*.

3. *Les valeurs $x'$ et $x''$ sont égales.* — L'équation de la courbe devient alors

$$y = ax + b \pm \frac{\mu}{C}(x - x').$$

La courbe se compose de deux droites qui se coupent.

**99**. Supposons maintenant que l'un des coefficients A ou C soit nul ; soit par exemple $C = 0$ : le binôme $B^2 - AC$ étant positif, le coefficient B ne peut pas être nul et l'équation (1) devient

$$(4) \qquad Ax^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

En résolvant cette équation par rapport à la variable $y$ qui n'entre qu'au premier degré, on a

$$y = -\frac{Ax^2 + 2Dx + F}{2(Bx + E)}.$$

Effectuons la division indiquée dans le second membre de cette équation ; en représentant par $cx + d$ le quotient, par R le reste qui est une constante, on aura

$$(5) \qquad y = cx + d + \frac{R}{2(Bx + E)}.$$

Nous distinguerons deux cas.

**Premier cas.** — *Le reste* R *n'est pas nul.* — Construisons la droite DD′ qui a pour équation

$$y_1 = cx + d,$$

et posons

$$z = \frac{R}{2(Bx + E)};$$

il en résultera

$$y = y_1 + z;$$

cette relation montre que, pour avoir les points de la courbe, il faut ajouter aux ordonnées des différents

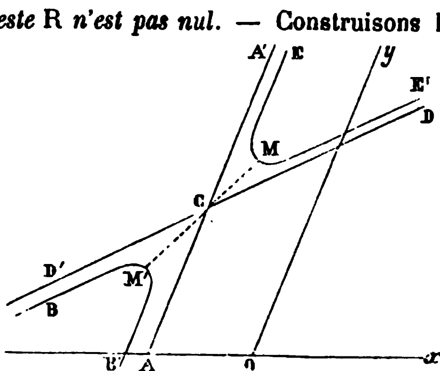


Fig. 87.

points de la droite DD′ une quantité égale à la valeur *algébrique* de $z$. En d'autres termes, on est ramené à construire la courbe qui a pour équation

$$z = \frac{R}{2(Bx+E)},$$

en portant les abscisses sur $ox$ à partir du point $o$, et les ordonnées $z$ parallèlement à $oy$, mais à partir de la droite DD′.

Pour fixer les idées, nous supposerons que les coefficients R, B, E sont positifs.

La fonction $z$ est discontinue pour $x = -\frac{E}{B}$; soit AA′ la droite qui a pour équation $x = -\frac{E}{B}$.

Quand $x$ varie de $-\infty$ à $-\frac{E}{B} - \varepsilon$, la fonction $z$ toujours négative varie de 0 à $-\infty$; on a donc une première branche de courbe BB′ asymptote aux droites DD′ et AA′ dans le sens des ordonnées négatives.

Quand $x$ varie de $-\frac{E}{B} + \varepsilon$ à $+\infty$, la fonction $z$ toujours positive varie de $+\infty$ à 0; on a donc une seconde branche de courbe EE′ asymptote aux droites DD′ et AA′ dans le sens des ordonnées positives.

*Centre.* — Il est aisé de démontrer que le point C intersection des deux asymptotes est un centre.

Menons en effet par ce point une sécante qui rencontre la courbe aux points M et M′; son équation sera

$$y - cx - d = \lambda(Bx+E).$$

En éliminant $y$ entre cette équation et l'équation (5), on a pour déterminer les abscisses des points M et M′ l'équation

$$(Bx+E)^2 - \frac{R}{2\lambda} = 0.$$

La demi-somme des racines de cette équation, c'est-à-dire l'abscisse du milieu de la corde MM′, a pour valeur $-\frac{E}{B}$; ce milieu coïncide donc avec le point C, qui dès lors est un centre.

La courbe que nous venons de construire est encore une *hyperbole.*

En résumé, quand, dans l'équation du second degré, manque le terme en $y^2$, cette équation représente une hyperbole dont on obtient les asymptotes en appliquant la règle suivante:

**Règle.** — 1° *Pour avoir l'asymptote parallèle à l'axe des y, on égale à zéro le coefficient de y dans l'équation de la courbe.*

2° *Pour avoir l'asymptote non parallèle à l'axe des y, on réduit à sa partie entière l'expression* (5) *de l'ordonnée.*

**Remarques.** — 1° Quand on a simultanément $C = 0$, $E = 0$, l'asymptote parallèle à l'axe des $y$ se confond avec cet axe.

L'équation de la courbe devient alors

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Dx + F = 0;$$

elle ne contient ni terme en $y^2$, ni terme en $y$.

2° Quand les termes en $x^2$, $y^2$, $x$ et $y$ manquent à la fois, c'est-à-dire quand l'équation de la courbe est de la forme

$$2Bxy + F = 0,$$

elle représente une hyberbole ayant pour asymptotes les axes des coordonnées.

**Deuxième cas.** — *Le reste* R *est nul.* — On a alors identiquement

$$Ax^2 + 2Dx + F \equiv -2(cx + d)(Bx + E),$$

et l'équation (4) devient

$$(Bx + E)(y - cx - d) = 0;$$

elle représente deux droites qui se coupent et dont les équations sont

$$Bx + E = 0 \qquad y - cx - d = 0.$$

**Genre Parabole.** $\delta = B^2 - AC = 0.$

**100.** Dans ce cas, on peut avoir à la fois $B = 0$, $C = 0$ ou $B = 0$, $A = 0$; nous supposerons d'abord $C \gtrless 0$.

Comme pour le genre Ellipse et le genre Hyperbole, on est ramené à étudier l'ordonnée au diamètre Y, dont l'expression devient

$$Y = \frac{1}{C}\sqrt{2px + q}.$$

Nous distinguerons deux cas :

1° $p \gtrless 0$. — *Soit par exemple* $p > 0$. Pour que Y soit réel, il faut que $x$ varie de $-\frac{q}{2p}$ à $+\infty$ ; alors Y croît de zéro à $+\infty$ ; soit A$a$ la droite qui a pour équation $x = -\frac{q}{2p}$, la courbe sera tout entière par rapport à cette droite du côté des $x$ positifs : elle est formée de deux arcs qui, partant du point A, s'étendent à l'infini de part et d'autre du diamètre DD'. On lui a donné le nom de *Parabole*.

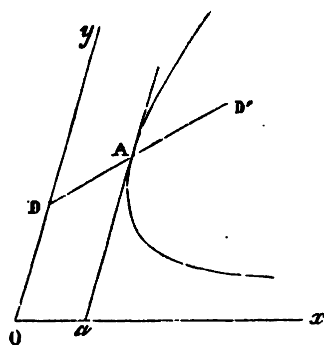


Fig. 88.

On verrait toujours de la même manière que la courbe touche au point A la droite A$a$.

**Remarque.** — Quand $p$ est négatif, la courbe est encore une *parabole* qui s'étend à l'infini dans le sens des abscisses négatives.

2° $p = 0$. — L'équation de la courbe devient alors

$$y = ax + b \pm \frac{1}{C}\sqrt{q}.$$

Cette équation représente deux droites parallèles équidistantes du diamètre DD' ; ces deux droites sont

$$\left.\begin{array}{c}\textit{réelles et distinctes}\\ \textit{confondues}\\ \textit{imaginaires}\end{array}\right\} \textit{si l'on a} \left\{\begin{array}{l} q > 0\\ q = 0\\ q < 0.\end{array}\right.$$

**101.** Supposons maintenant que l'on ait à la fois $B = C = 0$, l'équation (1) devient :

$$(6) \qquad Ax^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Nous distinguerons deux cas :

1. $E \gtrless 0$. — L'équation (6) donne pour $y$ une valeur de la forme

$$y = ax^2 + bx + c.$$

On peut toujours supposer que le coefficient $a$ est positif, car,

s'il était négatif, il suffirait de changer $y$ en $-y$ pour être ramené à la première hypothèse; or, cela revient à changer le sens des ordonnées positives.

Soient $x'$ et $x''$ les racines de l'équation

$$ax^2+bx+c=0.$$

Nous distinguerons trois cas :

1° *Les racines $x'$ et $x''$ sont réelles et inégales.* — Soit, pour fixer les idées, $x'>x''$. On a

$$y=a(x-x')(x-x'').$$

Quand $x$ varie de $-\infty$ à $x''$, $y$ toujours positif décroît de $+\infty$ à 0, ce qui donne l'arc CA s'étendant à l'infini dans le sens des ordonnées positives et coupant l'axe des $x$ au point qui a pour abscisse $x''$.

Quand $x$ varie de $x''$ à $x'$, $y$ toujours négatif part de la valeur 0 et redevient nul, ce qui donne l'arc AMB situé du côté des $y$ négatifs et coupant l'axe des $x$ aux points A et B qui ont pour abscisses $x''$ et $x'$.

Enfin, quand $x$ varie de $x'$ à $+\infty$, $y$ toujours positif croît de 0 à $+\infty$, ce qui donne l'arc BD s'étendant à l'infini dans le sens des ordonnées positives.

La courbe est encore une parabole.

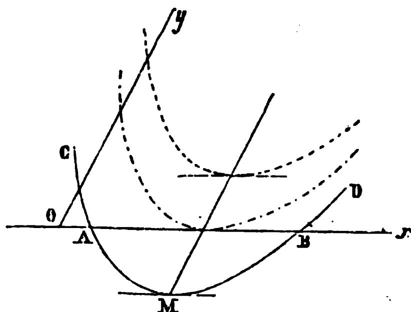


Fig. 89.

**Remarque.** — Quand on parcourt l'arc AMB, la valeur absolue de l'ordonnée passe par un maximum; pour déterminer ce maximum, remarquons que l'on a

$$-y=a(x'-x)(x-x'').$$

Les deux facteurs positifs $x'-x$, $x-x''$ ont une somme constante, donc $-y$ sera maximum quand on aura

$$x'-x=x-x'', \quad \text{d'où} \quad x=\frac{x'+x''}{2}.$$

L'ordonnée dont la valeur absolue est maximum passe donc par le milieu de la corde AB, et est égale à $-a\left(\frac{x'-x''}{2}\right)^2$.

2° *Les racines $x'$ et $x''$ sont égales.* — Les deux points A et B coïncident et la courbe est encore une parabole qui touche l'axe des $x$, au point ayant $x'$ pour abscisse.

3° *Les racines $x'$ et $x''$ sont imaginaires.* — Quand $x$ varie de $-\infty$ à $+\infty$, $y$ toujours positif et continu part de l'infini pour redevenir infini; la courbe est encore une parabole ne rencontrant plus l'axe des $x$ et dont un des points a une ordonnée minimum.

Pour déterminer ce minimum, nous écrirons la valeur de l'ordonnée de la manière suivante :

$$y=\frac{1}{a}\left(ax+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

La constante $\frac{4ac-b^2}{4a}$ est positive, puisque les racines $x'$, $x''$ sont imaginaires; donc le minimum de $y$ correspond à l'abscisse $x=-\frac{b}{2a}$, et il a pour valeur $\frac{4ac-b^2}{4a}$.

2. $E=0$. — L'équation (6) devient

$$Ax^2+2Dx+F=0.$$

Elle représente deux droites parallèles à l'axe des $y$.

*Ces droites sont* { *réelles et distinctes* / *confondues* / *imaginaires* } *si l'on a* { $D^2-AF>0$ / $D^2-AF=0$ / $D^2-AF<0$. }

**102. Marche à suivre pour la discussion d'une équation du second degré.** — On commence par former le binôme $B^2-AC$ pour déterminer le genre de la courbe.

Si l'équation contient $x$ et $y$ au second degré, on la résout par rapport à $y$, et, dans l'expression ainsi obtenue, on égale à zéro la quantité placée sous le radical.

Quand les racines de cette équation sont réelles et distinctes, la courbe est une véritable ellipse ou une véritable hyperbole.

Quand ces racines sont égales, la courbe se compose de deux droites qui se coupent *réelles* ou *imaginaires*.

Quand ces racines sont imaginaires, la courbe est une ellipse imaginaire ou une hyperbole.

Si le trinôme placé sous le radical s'abaisse au premier degré, la courbe est une parabole.

Si ce trinôme se réduit à une constante, la courbe se compose de deux droites parallèles.

Supposons maintenant que, dans l'équation, $y$ n'entre qu'au premier degré; on la résoudra par rapport à $y$ et, dans l'expression ainsi obtenue, on effectuera la division du numérateur par le dénominateur.

Si le reste de cette division n'est pas nul, la courbe est une hyperbole.

Si ce reste est nul, la courbe se compose de deux droites qui se coupent.

Enfin, si le dénominateur est une constante, la courbe est une parabole.

Les résultats de la discussion de l'équation du second degré sont résumés dans le tableau suivant:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Genre Ellipse** $\delta < 0$ | *L'équation* $Y^2 = 0$ *a ses racines. . . .* | *réelles et distinctes.* | **Ellipse.** |
| | | *égales . . . . . .* | **Un point.** |
| | | *imaginaires.* | **Ellipse imaginaire.** |
| **Genre Hyperbole** $\delta > 0$ | *L'équation* $Y^2 = 0$ *a ses racines. . . .* | *réelles et distinctes ou imaginaires . .* | **Hyperbole.** |
| | | *égales.* | **Deux droites qui se coupent.** |
| | $C = 0$ . . . . | | **Hyperbole ayant une asymptote parallèle à** $oy$, **ou deux droites.** |
| | $C = 0$, $E = 0$. | | **Hyperbole asymptote à l'axe** $oy$. |
| **Genre Parabole** $\delta = 0$ | $Y^2$ *est du premier degré. . . .* | | **Parabole.** |
| | $Y^2$ *se réduit à une constante* | *positive. .* | **Deux droites parallèles et distinctes.** |
| | | *nulle . . .* | **Deux droites confondues.** |
| | | *négative. .* | **Deux droites parallèles imaginaires.** |
| | $B = 0$ $C = 0$ $E \gtrless 0$. . . . | | **Parabole.** |
| | $B = 0$, $C = 0$ $E = 0$. . . . | | **Deux droites parallèles.** |

# CHAPITRE II

**Application des propriétés des polynômes homogènes du second degré à la classification des courbes du second ordre.**

**103.** On a vu en algèbre que tout polynôme homogène du second degré à $n$ variables est, en général, égal à la somme des carrés de $n$ fonctions linéaires et homogènes de ces variables. En appliquant à la fonction

$$(1) \qquad f = Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F$$

les transformations qui ont permis d'établir cette proposition, on donne à l'équation du second degré des formes qui permettent de déterminer facilement la nature des courbes qu'elle représente.

Nous aurons à examiner les deux hypothèses suivantes :

I. — *Les coefficients des carrés $x^2$ et $y^2$ ne sont pas nuls à la fois.*

II. — *Les coefficients de ces carrés sont nuls à la fois.*

Dans ce qui suit, nous aurons à considérer, outre la fonction $\delta = B^2 - AC$, une autre fonction $\Delta$ que nous allons définir, et qui est appelée le *discriminant* de la fonction du second degré $f(x, y)$.

Les demi-dérivées partielles de la fonction $f$ rendue homogène, c'est-à-dire de la fonction

$$f = Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2,$$

ont pour expression

$$\frac{1}{2} f'_x = Ax + By + Dz$$

$$\frac{1}{2} f'_y = Bx + Cy + Ez$$

$$\frac{1}{2} f'_z = Dx + Ey + Fz,$$

Nous désignerons par $\Delta$ le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

qui a pour éléments les coefficients des variables $x$, $y$, $z$ dans les demi-dérivées $\frac{1}{2}f'_x, \frac{1}{2}f'_y, \frac{1}{2}f'_z$.

En développant ce déterminant, on trouve

$$\Delta = -AE^2 - CD^2 + 2BDE - F(B^2 - AC).$$

Nous allons maintenant transformer la fonction $f$.

## I. — Les coefficients des carrés $x^2$ et $y^2$ ne sont pas nuls à la fois.

**104.** Pour fixer les idées, supposons $A \gtrless 0$. On a identiquement

$$f = \frac{1}{A}(Ax + By + D)^2 + Cy^2 + 2Ey + F - \frac{1}{A}(By + D)^2,$$

ou bien

$$f = \frac{1}{A}[(Ax + By + D)^2 + (AC - B^2)y^2 + 2(AE - BD)y + AF - D^2]. \tag{2}$$

Nous désignerons par P la fonction $Ax + By + D$, qui n'est autre chose que $\frac{1}{2}f'_x$.

Nous devons maintenant distinguer deux cas :

1° $\delta = B^2 - AC \gtrless 0$. On a alors identiquement

$$f = \frac{1}{A}\left[P^2 - \frac{1}{\delta}(-\delta y + AE - BD)^2 + \frac{(AF - D^2)(B^2 - AC) + (AE - BD)^2}{\delta}\right],$$

ou bien

$$f = \frac{1}{A}\left[P^2 - \frac{Q^2}{\delta} - \frac{A\Delta}{\delta}\right],$$

en posant $Q = -\delta y + AE - BD$, et remarquant que l'on a

$$(AF - D^2)(B^2 - AC) + (AE - BD)^2 = -A\Delta. \tag{3}$$

On voit que, si $\delta$ n'est pas nul, l'équation d'une courbe du second ordre pourra être ramenée à la forme suivante :

(I) $$\delta P^2 - Q^2 - A\Delta = 0.$$

2° $\delta = B^2 - AC = 0$. — L'égalité (2) devient alors

$$f = \frac{1}{A}[P^2 + 2(AE - BD)y + AF - D^2].$$

D'un autre côté, l'égalité (3) nous donne

$$(AE - BD)^2 = - A\Delta.$$

Par conséquent, si $\Delta$ n'est pas nul, on aura

$$f = \frac{1}{A}[P^2 + Q],$$

en posant $Q = 2(AE - BD)y + AF - D^2$, et l'équation de la courbe du second ordre pourra être ramenée à la forme

(II) $$P^2 + Q = 0.$$

Si $\Delta$ est nul, on aura

$$f = \frac{1}{A}[P^2 + AF - D^2]$$

et l'équation de la courbe du second ordre pourra être ramenée à la forme

(III) $$P^2 + AF - D^2 = 0.$$

II. — **Les coefficients des carrés $x^2$ et $y^2$ sont nuls à la fois.**

On a alors

$$f = 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F,$$

ou bien

$$f = \frac{2}{B}(By + D)(Bx + E) + F - \frac{2DE}{B},$$

ou encore

$$f = \frac{1}{B}\left[2PQ - \frac{\Delta}{B}\right],$$

en posant $P = By + D$, $Q = Bx + E$, et remarquant que, A et C étant nuls, on a

$$F - \frac{2DE}{B} = - \frac{\Delta}{B^2}.$$

Il n'est pas inutile d'observer que les polynômes P et Q sont respectivement égaux aux demi-dérivées $\frac{1}{2}f'_x$, $\frac{1}{2}f'_y$ de la fonction $f$.

En résumé, quand les coefficients A et C sont nuls à la fois, l'équation de la courbe du second ordre pourra être ramenée à la forme

$$(\mathrm{I}^{bis}) \qquad PQ - \frac{\Delta}{2B} = 0.$$

**Remarque.** — La forme $(\mathrm{I}^{bis})$ est comprise dans la forme (I); en effet, on a identiquement

$$PQ = \left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P-Q}{2}\right)^2,$$

et l'équation $(\mathrm{I}^{bis})$ devient

$$\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P-Q}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{2B} = 0.$$

**105**. Nous allons maintenant chercher les courbes, qui sont représentées par les équations (I) (II) (III) $(\mathrm{I}^{bis})$.

Ces équations sont de la forme

$$f(P,Q) = 0,$$

P et Q étant des fonctions linéaires ; les droites AP, AQ représentées par les équations $P = 0$, $Q = 0$ se coupent en un point A ; car, si l'on considère les formes (I) (II) (III), la fonction P renferme les deux variables $x$ et $y$, et la fonction Q une seule variable; si l'on considère la forme $(\mathrm{I}^{bis})$, la fonction P renferme seulement la variable $y$ et la fonction Q seulement la variable $x$.

Quand on donne à Q une valeur $\beta$, l'équation $f(P,Q) = 0$ donne pour P des valeurs de la forme $P = \alpha$; les différents points M de la courbe représentée par cette équation sont donc déterminés par l'intersection de deux droites parallèles, l'une à AP, l'autre à AQ.

Cela posé, considérons d'abord l'équation

$$(\mathrm{I}) \qquad \delta P^2 - Q^2 - A\Delta = 0.$$

Nous aurons à examiner deux hypothèses principales :

1° $\delta < 0$. — En mettant en évidence les signes des coefficients, l'équation peut avoir l'une des trois formes suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} P^2+Q^2 \quad\;\; =1 \\ P^2+Q^2 \quad\;\; =0 \\ P^2+Q^2+1=0 \end{array}\right\} \text{on a alors} \left\{\begin{array}{l} A\Delta<0 \\ \Delta=0 \\ A\Delta>0. \end{array}\right.$$

L'équation

$$P^2+Q^2=1$$

montre que P et Q restent compris entre $-1$ et $+1$ ; donc la courbe représentée par cette équation est limitée dans tous les sens ; cette courbe est une *ellipse* située à l'intérieur du parallélogramme dont les côtés ont pour équations

$$P=\pm 1 \qquad Q=\pm 1.$$

On vérifie facilement que l'ellipse passe par les milieux des côtés du parallélogramme, et qu'elle est tangente à ces côtés.

Pour une valeur $\beta$ attribuée à Q, notre équation donne pour P deux valeurs égales et de signes contraires ; on obtient donc ainsi sur la droite MM′ définie par l'équation $Q=\beta$, deux points M et M′ également distants de AP ; par suite, la droite AP divise en deux parties égales les cordes parallèles à la droite AQ.

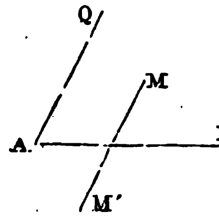


Fig. 90.

On voit de même que la droite AQ divise en deux parties égales les cordes parallèles à la droite AP. Il résulte de là que les droites AP, AQ forment un système de diamètres conjugués.

L'équation

$$P^2+Q^2=0$$

n'admet pas d'autres solutions réelles que $P=0$, $Q=0$ ; elle représente donc un *point*.

Enfin l'équation

$$P^2+Q^2+1=0$$

n'admet aucune solution réelle, nous dirons qu'elle représente une *ellipse imaginaire*.

2° $\delta > 0$. — En mettant en évidence les signes des coefficients, l'équation (I) peut avoir l'une des formes suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} P^2-Q^2\pm 1=0 \\ P^2-Q^2 \quad\;\; =0 \end{array}\right\} \text{on a alors} \left\{\begin{array}{l} \Delta \gtrless 0 \\ \Delta=0. \end{array}\right.$$

Considérons par exemple l'équation

$$P^2 - Q^2 = 1,$$

elle montre que Q peut varier de $-\infty$ à $+\infty$, sans que P cesse d'être réel; $P^2$, d'abord infini, redevient infini en passant par la valeur minimum 1. Il résulte de là que la courbe n'a aucun point situé entre les droites qui ont pour équation

$$P = \pm 1;$$

elle se compose de deux branches séparées et s'étendant à l'infini : cette courbe est donc une *hyperbole*.

On verrait de même que l'équation

$$P^2 - Q^2 = -1$$

représente une *hyperbole*.

Dans les deux cas, les droites AP, AQ forment deux diamètres conjugués.

Quant à l'équation

$$P^2 - Q^2 = 0$$

qui se décompose en deux autres,

$$P + Q = 0, \qquad P - Q = 0,$$

elle représente deux droites qui se coupent.

**106.** Considérons en second lieu l'équation

$$\text{(II)} \qquad P^2 + Q = 0.$$

On ne peut faire varier Q que de 0 à $-\infty$ ; la courbe représentée par cette équation est illimitée dans un seul sens, elle est donc une *parabole*.

Considérons, en troisième lieu, l'équation

$$\text{(III)} \qquad P^2 + AF - D^2 = 0;$$

on en tire

$$P = \pm \sqrt{D^2 - AF}.$$

L'équation représente donc

| | | |
|---|---|---|
| **Deux droites parallèles réelles** | *si l'on a* | $D^2 - AF > 0$ |
| **Deux droites confondues** | | $D^2 - AF = 0$ |
| **Deux droites parallèles imaginaires** | | $D^2 - AF < 0.$ |

**107.** Reste enfin à étudier l'équation

$$(\mathrm{I}^{bis}) \qquad PQ - \frac{\Delta}{2B} = 0,$$

qui peut être écrite de la manière suivante:

$$\left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P-Q}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{2B} = 0.$$

Sous cette forme, on voit que l'équation représente une hyperbole quand $\Delta$ n'est pas nul, et deux droites qui se coupent quand $\Delta$ est nul.

Les résultats auxquels nous venons de parvenir sont résumés dans le tableau suivant:

| GENRE de la courbe | FORME QUE PREND l'équation de la courbe | | NATURE de la courbe |
|---|---|---|---|
| Genre Ellipse $\delta<0$ | $A\Delta<0$ | $P^2+Q^2-1=0$ | *Ellipse.* |
| | $\Delta=0$ | $P^2+Q^2=0$ | *Point.* |
| | $A\Delta>0$ | $P^2+Q^2+1=0$ | *Ellipse imaginaire.* |
| Genre Hyperbole $\delta>0$ | $\Delta \lessgtr 0$ | $P^2-Q^2=\pm 1$ | *Hyperbole.* |
| | $\Delta=0$ | $P^2-Q^2=0$ | *Deux droites qui se coupent.* |
| | $A=0$, $C=0$, $\Delta \gtrless 0$ | $PQ=\pm 1$ | *Hyperbole.* |
| | $A=0$, $C=0$, $\Delta=0$ | $PQ=0$ | *Deux droites qui se coupent.* |
| Genre Parabole $\delta=0$ | $\Delta \gtrless 0$ | $P^2+Q=0$ | *Parabole.* |
| | | $P^2=1$ | *Deux droites parallèles réelles.* |
| | $\Delta=0$ | $P^2=0$ | *Deux droites confondues.* |
| | | $P^2=-1$ | *Deux droites parallèles imaginaires.* |

### Condition pour que l'équation générale du second degré représente deux droites.

L'examen du tableau précédent conduit immédiatement au théorème suivant:

**108. — Théorème.** — 1° *Pour que l'équation du second degré*

*à deux variables représente deux droites, il faut et il suffit que le discriminant $\Delta$ soit nul; 2° les deux droites sont concourantes si la fonction $\delta$ n'est pas nulle; elles sont parallèles si la fonction $\delta$ est nulle.*

Les propriétés des polynômes homogènes du second degré permettent d'établir facilement la même proposition.

En effet, pour que l'équation du second degré $f(x,y)=0$ représente deux droites, il faut et il suffit que l'on ait identiquement

$$f = PQ \quad \text{ou} \quad f = (P+Qi)(P-Qi),$$

suivant que les deux droites sont réelles ou imaginaires; P et Q représentent deux fonctions du premier degré.

Dans le premier cas, on a identiquement

$$f = \left(\frac{P+Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P-Q}{2}\right)^2.$$

Dans le second cas, on a identiquement

$$f = P^2 + Q^2.$$

En résumé, le problème est ramené à exprimer que la fonction $f$ est égale à la somme des carrés de *deux* fonctions linéaires.

La solution que nous allons donner de cette question est due, en partie, à M. Kronecker; elle s'applique à une fonction homogène du second degré de $n$ variables; mais nous examinerons seulement le cas où le nombre des variables est trois.

**109. Lemme.** — *Soit $f(x,y,z)$ une fonction du second degré des variables $x, y, z$; si l'on a, quelles que soient ces variables, la relation*

$$x' f'_x + y' f'_y + z' f'_z = 0,$$

*les coefficients $x', y', z'$ n'étant pas nuls à la fois, on aura aussi, quelles que soient $x, y, z$, la relation*

$$f(x+x', y+y', z+z') = f(x,y,z).$$

En effet, on a démontré en algèbre l'égalité

$$f(x+x', y+y', z+z') = f(x,y,z) + (x' f'_x + y' f'_y + z' f'_z) + \frac{1}{2}(x' f''_x + y' f''_y + z' f''_z)^{(2)};$$

or, si l'on pose

$$u = x'f'_x + y'f'_y + z'f'_z,$$

on vérifie facilement la relation

$$(x'f''_x + y'f''_y + z'f''_z)^{(2)} = x'u'_x + y'u'_y + z'u_z,$$

mais la fonction $u$ étant nulle identiquement, il en est de même de ses trois dérivées partielles : le lemme est donc démontré.

**Théorème.** — *Pour qu'une fonction homogène et du second degré à trois variables soit la somme des carrés de deux fonctions linéaires homogènes et indépendantes de ces variables, il faut et il suffit que le discriminant $\Delta$ de cette fonction soit nul et qu'un des mineurs du premier ordre, au moins, ne soit pas nul.*

1° *Les conditions sont nécessaires.* — Soit

$$f = Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$$

une fonction homogène du second degré à trois variables $x, y, z$; supposons que l'on ait identiquement

$$f = X^2 + Y^2,$$

avec

$$X = ax + by + cz \qquad Y = a'x + b'y + c'z;$$

on aura aussi identiquement

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{2} f'_x &= Ax + By + Dz \equiv aX + a'Y \\ \tfrac{1}{2} f'_y &= Bx + Cy + Ez \equiv bX + b'Y \\ \tfrac{1}{2} f'_z &= Dx + Ey + Fz \equiv cX + c'Y. \end{aligned}$$

Les deux équations homogènes

$$X = 0 \qquad Y = 0,$$

renferment *trois* inconnues $x, y, z$; donc elles admettent une solution $x = \alpha$, $y = \beta$, $z = \gamma$, les valeurs $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ n'étant pas toutes nulles; les identités (1) nous montrent que ces valeurs doivent satisfaire aux équations

$$f'_x = 0 \qquad f'_y = 0 \qquad f'_z = 0;$$

donc déjà le discriminant $\Delta$ de la fonction $f$ est nul.

Reste à démontrer que tous les mineurs du premier ordre de $\Delta$ ne sont pas nuls.

Par hypothèse, les fonctions X et Y sont indépendantes; donc, parmi les déterminants du second degré formés en prenant deux colonnes dans le tableau suivant:

$$\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{matrix}$$

l'un *au moins* n'est pas nul; pour fixer les idées, supposons que l'on ait

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

D'après les identités (1), les deux systèmes d'équations

$$(2) \qquad f'_x = 0 \qquad f'_y = 0$$

$$(3) \qquad aX + a'Y = 0 \qquad bX + b'Y = 0$$

sont équivalents; de plus, $\Delta'$ n'étant pas nul, on ne peut satisfaire aux équations (3) qu'en posant à la fois

$$X = 0 \qquad Y = 0.$$

Pour $z = 0$, ces deux équations se réduisent aux suivantes:

$$ax + by = 0 \qquad a'x + b'y = 0,$$

qui admettent *seulement* la solution $x = 0$, $y = 0$.

Il résulte de là que si l'on fait $z = 0$, les deux équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, c'est-à-dire les deux équations

$$Ax + By = 0 \qquad Bx + Cy = 0$$

admettront seulement la solution $x = 0$, $y = 0$; donc le mineur

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

2° *Les conditions sont suffisantes.* — En effet, le discriminant $\Delta$ étant nul et l'un de ses mineurs du premier ordre au moins étant différent de zéro, il existe, entre les dérivées partielles de la fonction $f$ une relation linéaire et homogène,

$$(4) \qquad \lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z = 0,$$

les coefficients $\lambda$, $\mu$, $\nu$ n'étant pas tous nuls.

Posons

$$X = x + \lambda\alpha \qquad Y = y + \mu\alpha \qquad Z = z + \nu\alpha;$$

nous aurons, d'après le lemme établi précédemment, l'identité

$$f(x, y, z) = f(X, Y, Z). \tag{5}$$

Supposons, par exemple, que le coefficient $\nu$ ne soit pas nul, nous pourrons poser $Z = 0$, c'est-à-dire

$$z + \nu\alpha = 0.$$

Cette équation donnera pour $\alpha$ une valeur finie et déterminée $\alpha = -\frac{z}{\nu}$, et l'identité (5) deviendra

$$f(x, y, z) = f(X, Y, 0);$$

le second membre ne dépend plus que des deux variables

$$X = x - \frac{\lambda}{\nu}z \qquad Y = y - \frac{\mu}{\nu}z.$$

qui sont évidemment indépendantes; donc la fonction $f$ est égale à la somme des carrés de deux fonctions linéaires et homogènes des variables $x, y, z$.

**Discussion.** — 1° *Soit* $\delta = B^2 - AC \gtrless 0$. — En développant l'identité (4), on obtient les équations

$$\begin{aligned} A\lambda + B\mu + D\nu &= 0 \\ B\lambda + C\mu + E\nu &= 0 \\ D\lambda + E\mu + F\nu &= 0, \end{aligned}$$

qui donnent les relations

$$\frac{\lambda}{BE - CD} = \frac{\mu}{BD - AE} = \frac{\nu}{AC - B^2}; \tag{6}$$

comme, par hypothèse, $\delta$ n'est pas nul, la constante $\nu$ sera différente de zéro, et nous pourrons poser $Z = 0$; la fonction $f$ sera donc une fonction homogène des variables X et Y, et, quand on y fera $z = 1$, elle sera une fonction homogène des variables $x - \frac{\lambda}{\nu}$, $y - \frac{\mu}{\nu}$; donc l'équation

$$f(x, y, 1) = 0$$

représentera deux droites qui se coupent au point ayant pour coordonnées $x = \frac{\lambda}{\nu}$, $y = \frac{\mu}{\nu}$.

2° *Soit* $\delta = 0$. — Les équations (6) exigent $\nu = 0$ et l'une des constantes $\lambda$ ou $\mu$ n'est pas nulle; soit, par exemple, $\mu \gtrless 0$; nous pourrons poser $Y = 0$, d'où $\alpha = -\frac{y}{\mu}$. La fonction $f$ sera alors homogène par rapport aux deux variables X et Z, c'est-à-dire de la forme

$$aX^2 + 2bXZ + cZ^2;$$

maintenant, quand on pose $z = 1$, on a aussi $Z = 1$; donc l'équation $f(x, y, 1) = 0$ pourra être mise sous la forme suivante:

$$aX^2 + 2bX + c = 0;$$

par suite, elle représente deux droites parallèles.

### Conditions pour que l'équation générale du second degré représente deux droites confondues.

Le problème revient à exprimer que la fonction homogène du second degré $f(x, y, z)$ est un carré parfait.

**110. Théorème.** — *Pour qu'une fonction homogène du second degré à trois variables soit un carré parfait, il faut et il suffit que le discriminant* $\Delta$ *de cette fonction soit nul, ainsi que tous les mineurs du premier ordre.*

1° *Les conditions sont nécessaires.* — Supposons que l'on ait identiquement

$$f = X^2$$

avec

$$X = ax + by + cz;$$

on aura aussi identiquement

$$(7)\qquad \begin{aligned} \tfrac{1}{2}f'_x &= Ax + By + Dz \equiv aX \\ \tfrac{1}{2}f'_y &= Bx + Cy + Ez \equiv cX \\ \tfrac{1}{2}f'_z &= Dx + Ey + Fz \equiv cX. \end{aligned}$$

Démontrons, par exemple, que dans le déterminant $\Delta$ tous les mineurs relatifs aux éléments D, E, F sont nuls.

Pour cela faisons $z=0$ dans les identités (7), ce qui donne les identités

$$Ax+By\equiv aX_1 \qquad Bx+Cy\equiv bX_1 \qquad Dx+Ey\equiv cX_1,$$

en posant $X_1=ax+by$. L'équation $X_1=0$ admet une solution $x=\alpha$, $y=\beta$ les valeurs $\alpha$ et $\beta$, n'étant pas nulles; ces valeurs doivent satisfaire aux équations

$$Ax+By=0 \qquad Bx+Cy=0 \qquad Dx+Ey=0;$$

donc les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} B & C \\ D & E \end{vmatrix}$$

sont nuls.

2° *Les conditions sont suffisantes*. — En effet, tous les mineurs du premier ordre du discriminant $\Delta$ étant nuls, il existe entre les dérivées partielles de la fonction $f$ deux relations linéaires et homogènes

$$(8) \qquad \begin{aligned} \lambda f'_x+\mu f'_y+\nu f'_z&=0 \\ \lambda_1 f'_x+\mu_1 f'_y+\nu_1 f'_z&=0; \end{aligned}$$

ces relations sont indépendantes, c'est-à-dire que, parmi les déterminants du second degré obtenus en prenant deux colonnes dans le tableau suivant

$$\begin{matrix} \lambda & \mu & \nu \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1, \end{matrix}$$

l'un au moins n'est pas nul. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\Delta'=\begin{vmatrix} \mu & \nu \\ \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix} \gtrless 0.$$

Posons

$$X=x+x' \qquad Y=y+y' \qquad Z=z+z',$$

avec

$$x'=\lambda\alpha+\lambda_1\beta \qquad y'=\mu\alpha+\mu_1\beta \qquad z'=\nu\alpha+\nu_1\beta.$$

En ajoutant les identités (8) multipliées respectivement par $\alpha$ et $\beta$, on obtient l'identité

$$x'f'_x+y'f'_y+z'f'_z=0;$$

donc, d'après le lemme établi précédemment, on aura identiquement

$$(9) \qquad f(x, y, z) = f(X, Y, Z).$$

Puisque le déterminant $\Delta'$ n'est pas nul, nous pourrons poser $Y = 0$, $Z = 0$, et les deux équations ainsi obtenues

$$y + \mu\alpha + \mu_1\beta = 0 \qquad z + \nu\alpha + \nu_1\beta = 0$$

donneront pour $\alpha$ et $\beta$ des valeurs finies et déterminées. L'identité (9) devient alors

$$f(x, y, z) = f(X, 0, 0);$$

le second membre est une fonction homogène de la seule variable X ; donc il est carré parfait.

**111.** On peut encore énoncer le théorème précédent de la manière suivante :

**Théorème.** — *Pour qu'une fonction f homogène et du second degré à trois variables soit un carré parfait, il faut et il suffit que ses dérivées partielles soient proportionnelles à une même fonction linéaire et homogène de ces trois variables.*

1° *La condition est nécessaire.* — En effet, de l'identité $f = X^2$ on déduit comme précédemment les identités

$$(7) \qquad \frac{1}{2}f'_x = aX \qquad \frac{1}{2}f'_y = bX \qquad \frac{1}{2}f'_z = cX.$$

2° *La condition est suffisante.* — Supposons, en effet, que l'on ait identiquement

$$\frac{\frac{1}{2}f'_x}{a} = \frac{\frac{1}{2}f'_y}{b} = \frac{\frac{1}{2}f'_z}{c} = \alpha x + \beta y + \gamma z;$$

il en résultera, en appliquant le théorème d'Euler,

$$f = (ax + by + cz)\,(\alpha x + \beta y + \gamma z);$$

d'où

$$f'_x = a(\alpha x + \beta y + \gamma z) + \alpha(ax + by + cz) = 2a(\alpha x + \beta y + \gamma z);$$

on tire de là

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \frac{\alpha}{a}(ax + by + cz),$$

puis

$$f=\frac{\alpha}{a}(ax+by+cz)^2.$$

La fonction $f$ est donc un carré parfait.

**112. Remarque.** — Lorsqu'on ramène l'équation du second degré à l'une des formes suivantes :

$$(9) \qquad P^2+Q^2=h \qquad P^2-Q^2=h \qquad P^2-Q=0 \qquad PQ=h,$$

en effectuant les transformations exposées au paragraphe (104), on est sûr que les droites qui ont pour équation $P=0$, $Q=0$ sont concourantes; il n'en est plus de même quand ces formes sont données *à priori*.

Dans ce cas, il faut commencer par examiner si les droites représentées par les équations $P=0$, $Q=0$ sont concourantes.

Quand ces droites sont concourantes, on peut appliquer toutes les conséquences résumées dans notre tableau.

Supposons maintenant que les deux droites soient parallèles, on aura identiquement

$$Q=\lambda P+\mu;$$

en substituant cette valeur de Q dans l'une quelconque des équations (9), on obtiendra une équation de la forme

$$\alpha P^2+2\beta P+\gamma=0,$$

qui représente deux droites parallèles.

## Discussion de quelques équations numériques du second degré.

**Exemple I.** — Soit l'équation

$$2x^2+y^2+2xy-5x-2y+\lambda=0.$$

On peut donner successivement à cette équation les formes suivantes:

$$(y+x-1)^2+2x^2-5x+\lambda-(x-1)^2=0$$

$$P^2+x^2-3x+\lambda-1=0$$

$$P^2+\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+\lambda-1-\tfrac{9}{4}=0,$$

ou enfin la forme

$$P^2 + Q^2 = \frac{13}{4} - \lambda.$$

Donc

$\lambda < \frac{13}{4}$ *Ellipse réelle*

$\lambda = \frac{13}{4}$ *Un point.*

$\lambda > \frac{13}{4}$ *Ellipse imaginaire.*

**Exemple II.** — Soit l'équation

$$2x^2 + y^2 - 4xy - 9x + 6y + \lambda = 0.$$

On peut donner successivement à cette équation les formes suivantes:

$$(y - 2x + 3)^2 + 2x^2 - 9x + \lambda - (2x - 3)^2 = 0$$

$$P^2 - 2x^2 + 3x + \lambda - 9 = 0$$

$$P^2 - \frac{1}{2}\left(-2x + \frac{3}{2}\right)^2 + \lambda - 9 + \frac{9}{8},$$

ou enfin la forme

$$P^2 - Q^2 = \frac{63}{8} - \lambda.$$

Pour $\lambda = \frac{63}{8}$, cette équation représente deux droites réelles et concourantes; pour toutes les autres valeurs de $\lambda$, elle représente une hyperbole.

**Exemple III.** — Soit l'équation

$$x^2 + 4y^2 - 4xy + 2x - 2\lambda y - \lambda = 0.$$

On peut donner successivement à cette équation les formes suivantes:

$$(x - 2y + 1)^2 + 4y^2 - 2\lambda y - \lambda - (2y - 1)^2 = 0$$

$$P^2 - 2(\lambda - 2)y - \lambda - 1 = 0.$$

Pour $\lambda = 2$ l'équation représente deux droites parallèles réelles ; pour les autres valeurs de $\lambda$, elle représente une parabole.

**Exemple IV.** — Soit l'équation

$$4xy + 2x + 4y + \lambda = 0.$$

On peut donner à cette équation la forme suivante :

$$(2x+2)(2y+1)+\lambda-2=0.$$

Pour $\lambda=2$, cette équation représente deux droites qui se coupent; pour les autres valeurs de $\lambda$, elle représente une hyperbole.

## Interprétation des inégalités.

**113.** Dans la discussion des lieux géométriques, on a souvent à interpréter des inégalités de la forme

$$f(x, y) \gtrless 0.$$

Pour cela, on commence par construire la courbe qui a pour équation

$$f(x, y)=0.$$

Cette courbe C partagera le plan en différentes *régions*. Nous entendons par région une portion du plan limitée par la courbe, et telle que, si l'on prend sur elle deux points à volonté, on peut aller du premier au second par un chemin ne rencontrant pas la courbe C.

Par exemple, si la courbe C a la forme indiquée sur la figure 91, on pourra former les régions (1), (2), (3), (4).

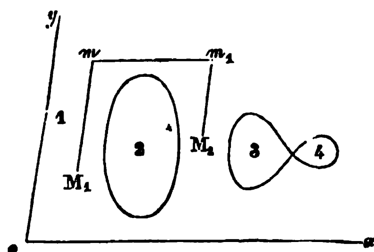


Fig. 91.

Nous démontrerons d'abord qu'en tous les points d'une même région la fonction $f(x,y)$ conserve le même signe, en nous bornant au cas où cette fonction est algébrique et de forme entière.

Prenons dans la région (1), par exemple, deux points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$; par hypothèse, on peut réunir ces deux points par un chemin curviligne ne rencontrant pas la courbe C; en particulier on pourra prendre pour ce chemin une ligne brisée $M_1 m m_1 M_2$ formée par des droites parallèles aux axes de coordonnées. Quand on parcourt le côté $M_1 m$, l'abscisse $x$ reste constamment égale à $x_1$, et l'on doit considérer la fonction $f(x, y)$ comme dépendant seulement de la variable $y$; cette fonction

***entière*** **et d'une** *seule* **variable ne s'annulant pas conservera un signe constant.**

En résumé, le signe de la fonction $f(x, y)$ est le même aux deux points M et $m$; un raisonnement analogue montre que ce signe se conserve aux points ($m$ et $m_1$), ($m_1$ et $M_2$); donc les deux quantités $f(x_1, y_1)$ et $f(x_2, y_2)$ sont de même signe.

En s'appuyant sur cette proposition, il devient facile d'interpréter une inégalité.

Pour fixer les idées, considérons l'inégalité

$$f(x, y) > 0.$$

Après avoir construit la courbe C, prenons dans le plan un point particulier, l'origine par exemple; supposons qu'en ce point la fonction $f(x, y)$ soit *positive* et que ce point soit dans la région (1), alors pour tous les points de cette région, l'inégalité sera satisfaite. Maintenant on peut aller d'un point de la région (1) à un autre point situé dans les régions (2), (3) ou (4), en suivant une ligne brisée dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées, et qui ne rencontre qu'une fois la courbe C. Quand on se déplacera sur le côté qui rencontre la courbe C, la fonction $f(x,y)$ ne dépendra que d'une seule variable, $x$ par exemple, et l'abscisse $x = x_1$ du point de rencontre sera une racine *simple* de l'équation $f = 0$; donc, pour tous les points des régions (2), (3) et (4), la fonction $f$ sera négative.

**Remarque.** — En discutant la formule qui donne la distance d'un point à une droite, nous avons déjà appliqué les considérations précédentes à la détermination du signe de la fonction $Ax + By + C$.

**114. Application.** — *On donne une circonférence* C, *un point* A *et une droite* D; *par le point* A *on mène une sécante qui coupe la droite* D *au point* B, *puis sur* AB, *comme diamètre, on décrit une circonférence* C'; *trouver le lieu décrit par le point* M *intersection de l'axe radical des circonférences* C *et* C' *avec la sécante* AB, *quand cette sécante tourne autour du point* A.

*Discuter ce lieu en supposant que, la circonférence* C *et la droite* D *restant fixes, le point* A *se déplace dans le plan.*

Nous prendrons pour axe des $y$ la droite D et pour axe des $x$ le diamètre de la circonférence C perpendiculaire sur cette droite; nous désignerons par $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du point A, par $d$

l'abscisse du centre et par R le rayon de la circonférence C.

L'équation de la circonférence C et celle de la sécante AB seront

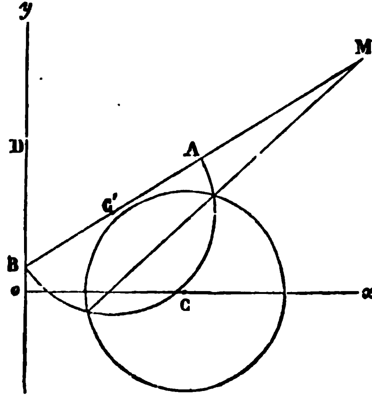


Fig. 92.

$$(x-d)^2+y^2-R^2=0,$$

$$(10)\qquad y-\beta=m(x-\alpha).$$

Le point B a pour coordonnées $(0, \beta - m\alpha)$; par suite, les coordonnées du point C' centre de la circonférence C' seront $\left(\frac{\alpha}{2}, \beta-\frac{m\alpha}{2}\right)$, et l'équation de cette circonférence sera de la forme

$$x^2+y^2-\alpha x-(2\beta-m\alpha)y+h=0.$$

On déterminera le paramètre $h$ en exprimant que la circonférence C' passe par le point A, et l'on trouvera, pour représenter cette circonférence, l'équation

$$x^2+y^2-\alpha x-(2\beta-m\alpha)y+\beta(\beta-m\alpha)=0;$$

on formera l'équation de l'axe radical des circonférences C et C' en retranchant leurs équations membre à membre, ce qui donne

$$(11)\qquad (2d-\alpha)x-2\beta y+\beta^2-d^2+R^2=m\alpha(\beta-y).$$

En éliminant $m$ entre les équations (10) et (11), on obtient la relation

$$(2d-\alpha)x^2+\alpha y^2-2\beta xy+(\beta^2+\alpha^2-2d\alpha-d^2+R^2)x+\alpha(d^2-R^2)=0,$$

qui représente le lieu cherché; on voit que ce lieu est une courbe du second ordre.

**Discussion.** — Cherchons d'abord le genre de la courbe: on a

$$\delta=\alpha^2+\beta^2-2d\alpha.$$

L'équation $\delta=0$ représente une circonférence S ayant pour centre le point C et tangente à la droite D; pour les coordonnées du point C $(d, 0)$, la fonction $\delta$ est négative; donc

$$\textit{Quand le point A est}\left\{\begin{array}{c}\textit{intérieur à S}\\ \textit{sur S}\\ \textit{extérieur à S}\end{array}\right\}\textit{, le lieu est du genre}\left\{\begin{array}{l}\textit{Ellipse.}\\ \textit{Parabole.}\\ \textit{Hyperbole.}\end{array}\right.$$

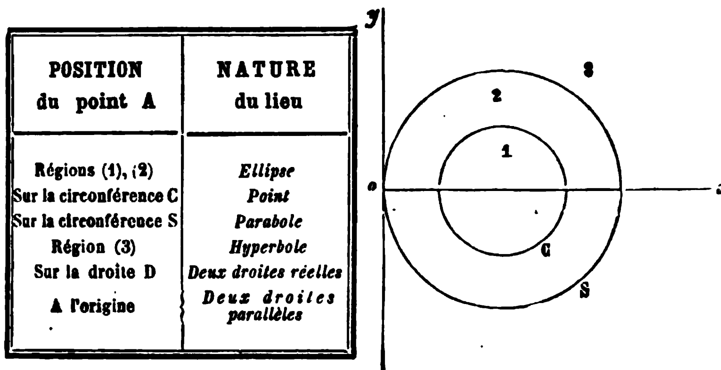
Le discriminant $\Delta$ a pour expression

$$\Delta = -\frac{1}{4}\alpha(\alpha^2 + \beta^2 - 2d\alpha + d^2 - R^2)^2;$$

égalé à zéro, il représente l'axe des $y$ et deux circonférences confondues avec la circonférence C.

Il est maintenant facile d'achever la discussion; nous nous contenterons d'indiquer les résultats en distinguant trois cas :

1° *La droite* D *ne coupe pas la circonférence* C. — Les courbes de séparation sont placées comme l'indique la figure 93, la circonférence S enveloppant la circonférence C.

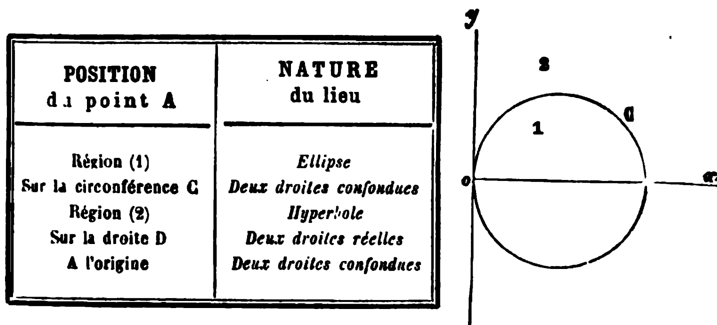


| POSITION du point A | NATURE du lieu |
|---|---|
| Régions (1), (2) | *Ellipse* |
| Sur la circonférence C | *Point* |
| Sur la circonférence S | *Parabole* |
| Région (3) | *Hyperbole* |
| Sur la droite D | *Deux droites réelles* |
| A l'origine | *Deux droites parallèles* |



Fig. 93.

2° *La droite* D *touche la circonférence* C. — Les courbes de séparation S et C se confondent.

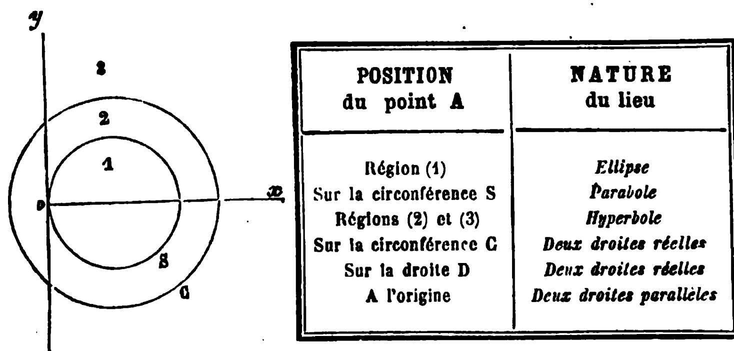


| POSITION du point A | NATURE du lieu |
|---|---|
| Région (1) | *Ellipse* |
| Sur la circonférence C | *Deux droites confondues* |
| Région (2) | *Hyperbole* |
| Sur la droite D | *Deux droites réelles* |
| A l'origine | *Deux droites confondues* |



Fig. 94.

3° *La droite* D *coupe la circonférence* C. — Dans ce cas, la circonférence S est intérieure à la circonférence C.




| POSITION du point A | NATURE du lieu |
|---|---|
| Région (1) | *Ellipse* |
| Sur la circonférence S | *Parabole* |
| Régions (2) et (3) | *Hyperbole* |
| Sur la circonférence C | *Deux droites réelles* |
| Sur la droite D | *Deux droites réelles* |
| A l'origine | *Deux droites parallèles* |

Fig. 95.

Le problème précédent peut être résolu et discuté par la géométrie; il conduit également à plusieurs remarques que nous n'avons pas signalées, ayant eu seulement pour but de mieux faire comprendre par un exemple l'interprétation des inégalités.

# CHAPITRE III

## CENTRE, DIAMÈTRES ET AXES DES COURBES DU SECOND ORDRE.

### CENTRE.

**115. Définition.** — *On appelle centre d'une courbe un point par rapport auquel tous les points de la courbe sont symétriques deux à deux.*

**Théorème.** — *Pour que l'origine des coordonnées soit centre d'une courbe algébrique, il faut et il suffit que dans son équation mise sous forme entière tous les termes soient de même parité.*

En groupant ensemble les termes de même degré, l'équation de la courbe prendra la forme suivante :

$$\varphi_m(x,y)+\varphi_{m-1}(x,y)+\ldots+\varphi_0(x,y)=0.$$

Une droite passant par l'origine est représentée par l'équation

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\rho,$$

dans laquelle $\alpha$ et $\beta$ sont les coordonnées d'un point déterminé D de la droite, $x$ et $y$ celles d'un point variable de cette droite ; quant à la quantité $\rho$, elle est égale au rapport $\frac{oM}{oD}$ pris positivement si les deux directions $oM$, $oD$ sont de même sens, et négativement dans le cas contraire.

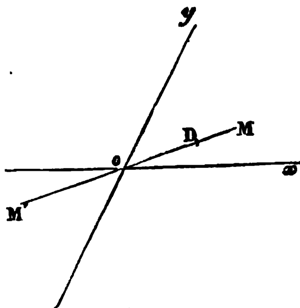


Fig. 96

Les valeurs de $\rho$ qui correspondent aux points où la sécante rencontre la courbe sont données par l'équation.

$$(1)\qquad \rho^m\varphi_m(\alpha,\beta)+\rho^{m-1}\varphi_{m-1}(\alpha,\beta)+\ldots+\varphi_0(\alpha,\beta)=0.$$

Supposons que l'origine soit centre, deux cas pourront se présenter.

En premier lieu, si la courbe ne passe pas par l'origine, ses points seront deux à deux symétriques par rapport à l'origine, et l'équation (1) aura ses racines égales deux à deux et de signes contraires ; elle ne renfermera que des termes de degré pair.

En second lieu, si la courbe passe par l'origine, l'équation (1) admettra une ou plusieurs racines nulles, et, après la suppression des racines nulles, tous les termes de l'équation modifiée seront de degré pair.

Dans les deux cas, les termes de l'équation (1) seront tous de même parité, et cela *quels que soient* $\alpha$ *et* $\beta$.

On ne peut pas avoir $\varphi_m(\alpha, \beta) = 0$, *quels que soient* $\alpha$ *et* $\beta$, car la courbe ne serait plus d'ordre $m$; par conséquent on doit avoir, *quels que soient* $\alpha$ *et* $\beta$,

$$\varphi_{m-1}(\alpha, \beta) = 0 \quad \varphi_{m-3}(\alpha, \beta) = 0 \quad \dots ;$$

et l'équation de la courbe ne peut contenir que des termes des degrés $m, m-2, m-4, \dots$

La réciproque est évidente.

**Remarque.** — Quand une courbe d'ordre impair admet l'origine pour centre, ce point est situé sur la courbe, puisque les termes de moindre degré sont au moins du premier degré.

**116. Recherche du centre.** — Pour trouver le centre d'une courbe, on transportera l'origine en un point indéterminé $A(x_0, y_0)$, et l'on cherchera s'il est possible, en profitant de l'indétermination des coordonnées $x_0, y_0$, de faire disparaître tous les termes de degré pair si l'équation de la courbe est d'ordre impair, et tous les termes de degré impair si cette équation est d'ordre pair.

*Application aux courbes du second ordre.* — En transportant l'origine des coordonnées au point $A(x_0, y_0)$, l'équation générale $f(x, y) = 0$ des courbes du second ordre devient :

$$\varphi(x, y) + xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + f(x_0, y_0) = 0,$$

$\varphi(x, y)$ représentant, suivant une convention déjà faite, l'ensemble des termes du second degré dans l'équation $f = 0$. Pour que la nouvelle origine soit centre, il faut et il suffit que l'on ait à la fois

$$(2) \qquad f'_{x_0} = 0 \quad f'_{y_0} = 0.$$

Ces deux équations sont appelées les *équations du centre*.

**Règle.** — *On obtient les équations du centre d'une courbe du second ordre en égalant à zéro les dérivées partielles du premier membre de son équation.*

**Discussion.** — Si l'on considère $x_0$ et $y_0$ comme des coordonnées courantes, chacune des équations (2) représente une droite, et le centre est au point d'intersection de ces deux droites.

Les équations du centre développées sont

$$(3) \qquad \begin{aligned} Ax+By+D&=0 \\ Bx+Cy+E&=0. \end{aligned}$$

Nous allons distinguer plusieurs cas :

1° *Les deux droites qui déterminent le centre ne sont pas parallèles.* — On a alors

$$\frac{A}{B} \gtrless \frac{B}{C}; \quad \text{d'où} \quad \delta = B^2 - AC \gtrless 0;$$

la courbe est du genre ellipse ou du genre hyperbole ; les courbes appartenant à ces deux genres ont donc un centre unique.

2° *Les deux droites qui déterminent le centre sont parallèles.* — On a alors

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C}; \quad \text{d'où} \quad \delta = B^2 - AC = 0,$$

et la courbe est une parabole. Nous dirons que la parabole a un centre rejeté à l'infini.

Il est nécessaire de fixer le sens de cette expression ; pour cela, supposons que la quantité $\delta$ n'étant pas d'abord nulle tende vers zéro d'une manière continue, la courbe (*ellipse* ou *hyperbole*) différera de moins en moins d'une parabole, et son centre s'éloignera à l'infini. C'est en ce sens que l'on peut considérer une parabole comme ayant un centre rejeté à l'infini.

3° *Les deux droites qui déterminent le centre sont confondues.*— La courbe a alors une infinité de centres sur une droite, et il est facile de montrer qu'elle se compose de deux droites parallèles. En effet, en identifiant les équations (3), on a les relations

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}.$$

Ces relations montrent que dans le discriminant $\Delta$ les éléments de la seconde ligne sont proportionnels à ceux de la première; par suite, on a à la fois $\Delta = 0$, $\delta = 0$, et la courbe se compose de deux droites parallèles (108).

**Remarque.** — Quand l'équation du second degré représente deux droites parallèles, les termes du second degré sont, à un facteur constant près, le carré des termes du premier degré.

En effet, en désignant par $\lambda$ les trois rapports égaux $\frac{A}{B}, \frac{B}{C}, \frac{D}{E}$, on a

$$A = B\lambda, \quad C = \frac{B}{\lambda}, \quad D = E\lambda;$$

et l'équation générale du second ordre à deux variables prend la forme suivante:

$$\frac{B}{\lambda}(\lambda x + y)^2 + 2E(\lambda x + y) + F = 0.$$

De la discussion précédente, il résulte que les courbes du second ordre peuvent être divisées en trois classes :

| | |
|---|---|
| 1° **Courbes ayant un centre unique.** | **Genre Ellipse.** <br> **Genre Hyperbole.** |
| 2° **Courbes ayant un centre à l'infini.** | **Parabole.** |
| 3° **Courbes ayant une infinité de centres sur une droite.** | **Deux droites parallèles.** |

## Équation de l'ellipse ou de l'hyperbole rapportée au centre.

**117.** Quand on transporte l'origine au centre, l'équation de la courbe (*ellipse ou hyperbole*) se simplifie et devient

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + F_1 = 0.$$

**Calcul de $F_1$.** — On a

$$F_1 = f(x_0, y_0),$$

$x_0$ et $y_0$ désignant les coordonnées du centre, coordonnées qui satisfont aux équations (2). Si l'on rend homogène la fonction $f(x,y)$, le théorème d'Euler donne l'identité

$$x_0 f'_{x_0} + y_0 f'_{y_0} + z_0 f'_{z_0} = 2f(x_0, y_0, z_0);$$

lorsque dans cette identité on fait $z_0 = 1$, les coefficients de $x_0$ et de $y_0$ s'annulent d'après les équations (2); quant au terme $f(x_0, y_0, z_0)$, il devient égal à $F_1$; en résumé, pour avoir $F_1$, il faudra éliminer $x_0, y_0$ entre les équations

$$\frac{1}{2}f'_{x_0} = 0 \quad \frac{1}{2}f'_{y_0} = 0 \quad \frac{1}{2}f'_{z_0} - F_1 = 0,$$

où l'on aura posé $z_0 = 1$, c'est-à-dire entre les équations

$$Ax_0 + By_0 + D = 0 \quad Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \quad Dx_0 + Ey_0 + F - F_1 = 0.$$

On obtient ainsi la relation

$$\begin{vmatrix} A & B & D+0 \\ B & C & E+0 \\ D & E & F-F_1 \end{vmatrix} = 0;$$

d'où l'on tire

$$F_1 = -\frac{\Delta}{\delta}.$$

## Diamètres.

**118. Définition.** — *On appelle diamètre d'une courbe le lieu des milieux des cordes parallèles à une direction donnée.*

Nous allons démontrer que, dans les courbes du second ordre, les diamètres sont des droites.

Soit $oD$ une droite passant par l'origine, à laquelle toutes les cordes doivent être parallèles; prenons sur cette droite un point $D(\alpha, \beta)$ et dans le plan un point quelconque $P(x_0, y_0)$; les coordonnées d'un point variable pris sur la corde passant par le point P seront données par les relations

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \rho.$$

Soit maintenant

$$f(x, y) = 0$$

l'équation de la courbe du second ordre, les valeurs de $\rho$ qui correspondent aux points A et B où la corde rencontre la courbe sont les racines de l'équation

$$f(x_0 + \rho\alpha, y_0 + \rho\beta) = 0,$$

c'est-à-dire de l'équation

(4) $$\rho^2\varphi(\alpha, \beta) + \rho(\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0}) + f(x_0, y_0) = 0.$$

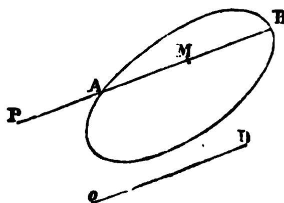


Fig. 97.

Nous allons distinguer deux cas :

I. — *$\varphi(\alpha, \beta)$ n'est pas nul.* — L'équation (4) donne alors pour $\rho$ deux valeurs finies ; par suite, les points A et B ainsi que le milieu M de la corde AB sont situés à distance finie, et l'on peut faire coïncider le point arbitraire P avec le milieu M. Cela étant, les racines de l'équation (4) seront égales et de signes contraires, et l'on aura la relation

$$\alpha f'_{x_0} + \beta f'_{y_0} = 0,$$

à laquelle doivent satisfaire les coordonnées $(x_0, y_0)$ du point M milieu de la corde AB.

Cette relation étant du premier degré, on en conclut que, dans les courbes du second ordre, les diamètres sont des droites.

**Remarque.** — On vérifie facilement que l'équation des diamètres peut-être mise sous la forme suivante :

$$(5) \qquad x_0 \frac{\varphi'_\alpha}{2} + y_0 \frac{\varphi'_\beta}{2} + D\alpha + E\beta = 0.$$

II. — *$\varphi(\alpha, \beta)$ est nul.* — On a alors la relation

$$(6) \qquad A\alpha^2 + C\beta^2 + 2B\alpha\beta = 0.$$

Nous subdiviserons ce second cas en quatre autres.

1° *La courbe est une ellipse.* — La quantité $\delta$ étant négative, l'équation (6) donne pour $\frac{\beta}{\alpha}$ des valeurs imaginaires ; l'hypothèse que nous examinons ne peut donc pas se présenter quand la courbe est une ellipse.

2° *La courbe est une hyperbole.* — La quantité $\delta$ étant positive, l'équation (6) donne pour $\frac{\beta}{\alpha}$ deux valeurs réelles et inégales.

Soit $o$D' la direction qui correspond à l'une de ces valeurs : pour toute corde parallèle à $o$D', l'équation (4) a une racine infinie; et l'un des deux points A ou B est rejeté à l'infini ; le milieu M de la corde AB est donc lui-même rejeté à l'infini et l'on ne peut plus, comme dans la première hypothèse, faire coïncider le point P avec le point M.

Maintenant les coefficients de $x_0$ et de $y_0$ dans l'équation (5) sont

$$A\alpha + B\beta \quad \text{et} \quad B\alpha + C\beta\,;$$

ils ne peuvent pas s'annuler en même temps, puisque la quantité $\delta = B^2 - AC$ n'est pas nulle ; l'équation (5) représente donc encore une droite L. Assujettissons les coordonnées du point P à satisfaire à l'équation de cette droite ; alors, dans l'équation (4), le coefficient de $\rho$ sera nul et les cordes menées parallèlement à $o$D', par les différents points de la droite L, rencontreront l'hyperbole en deux points rejetés à l'infini.

Ainsi, dans le cas particulier qui nous occupe, l'équation (5) représente le lieu des points tels que les cordes menées par chacun d'eux parallèlement à la direction $o$D' vont rencontrer l'hyperbole en deux points rejetés à l'infini.

Il est facile de montrer que toutes ces cordes se confondent avec la droite L ; comme elles ont un point commun avec cette droite, il suffira de faire voir qu'elles lui sont parallèles. Or on a identiquement

$$\alpha\varphi'_\alpha + \beta\varphi'_\beta \equiv 2\,\varphi(\alpha, \beta)\,;$$

le second membre de cette identité est nul, puisque, par hypothèse, $\frac{\beta}{\alpha}$ est racine de l'équation $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ ; par conséquent les deux rapports $\frac{\beta}{\alpha}$ et $-\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta}$ sont égaux ; les cordes sont donc parallèles à la droite L et coïncident avec elle.

Nous verrons plus tard que la droite L est une asymptote de l'hyperbole.

Nous allons maintenant montrer que la droite L qui, par son équation, fait partie des diamètres de l'hyperbole, peut en effet être considérée comme un diamètre.

Par tous les points de la droite L, menons des cordes parallèles entre elles et faisant avec cette droite un angle $\omega$ : chacune de ces cordes aura un point milieu, et nous allons faire voir que ces points milieux tendent vers des points déterminés de la droite L quand l'angle $\omega$ tend vers zéro.

Afin de faciliter la démonstration, prenons la droite L pour axe des $x$ et la seconde asymptote de l'hyperbole pour axe des $y$, l'équation de cette courbe sera (99)

$$xy - m^2 = 0.$$

L'équation d'une corde rencontrant la droite L au point P $(x_0, 0)$ est

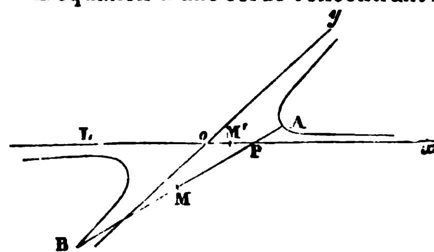


Fig. 98.

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \rho,$$

et les valeurs de $\rho$ qui correspondent aux points A et B où la corde rencontre l'hyperbole sont données par l'équation

$$\alpha f \rho^2 + \beta x_0 \rho - m^2 = 0.$$

La demi-somme des racines de cette équation a pour expression $-\frac{x_0}{2\alpha}$; par suite, les coordonnées du milieu M de la corde AB sont données par les équations

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = -\frac{x_0}{2\alpha}.$$

On en tire

$$x = \frac{x_0}{2} \quad y = -\frac{\beta x_0}{2\alpha}.$$

Si l'on fait tendre $\omega$ vers zéro, $\beta$ tend également vers zéro et les coordonnées du point M ont pour limites $\frac{x_0}{2}$ et 0.

Ainsi, quand la corde AB tournant autour du point P vient se confondre avec la droite L, son milieu M tend vers le point M', milieu de $o$P. Il résulte de là que chaque point de la droite L peut être regardé comme le milieu d'une des cordes qui viennent se confondre avec elle; cette droite peut donc être considérée comme un diamètre.

3° *La courbe est une parabole.* — La quantité $\delta$ étant nulle, l'équation (6) donne pour $\frac{\beta}{\alpha}$ deux valeurs égales :

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{B}{C} = -\frac{A}{B}.$$

Ces valeurs annulent les quantités $A\alpha + B\beta$ et $B\alpha + C\beta$; donc, dans l'équation (4), le coefficient de $\rho$ est indépendant de $x_0$ et

de $y_0$; dès lors, quelle que soit la position du point P, les cordes menées par ce point parallèlement à la direction $o$D', rencontreront la parabole en deux points, dont un seul est rejeté à l'infini, et les milieux de ces cordes seront tous à l'infini. Il résulte de là que le diamètre doit être lui-même rejeté à l'infini: c'est ce que montre du reste l'équation générale des diamètres, car les coefficients de $x_0$ et de $y_0$ étant nuls dans cette équation, les coordonnées à l'origine du diamètre sont infinies.

4° *La courbe se compose de deux droites parallèles.* — On a alors

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{C}=\frac{D}{E}.$$

L'équation (6) a encore une racine double satisfaisant aux trois équations

$$A\alpha+B\beta=0 \quad B\alpha+C\beta=0 \quad D\alpha+E\beta=0;$$

dans l'équation (4), les coefficients de $\rho^2$ et de $\rho$ sont nuls pour toutes les cordes parallèles à la direction $o$D'; ces cordes rencontrent donc les deux droites parallèles en deux points rejetés à l'infini. Quant à l'équation (5) des diamètres, elle devient identique.

### Discussion de l'équation des diamètres.

**119.** Reprenons l'équation générale des diamètres

$$(7) \qquad \alpha f'_x+\beta f'_y=0,$$

et cherchons comment ces droites sont placées dans les différentes courbes du second ordre.

1° *La courbe est une ellipse ou une hyperbole.* — Dans ce cas, tous les diamètres passent par le centre, car les coordonnées de ce point annulent à la fois $f'_x$ et $f'_y$.

Réciproquement, toute droite passant par le centre est un diamètre; en effet, si l'on fait varier de $-\infty$ à $+\infty$ le coefficient angulaire $\frac{\beta}{\alpha}$ des cordes conjuguées du diamètre, l'équation (7) pourra représenter une droite *quelconque* passant par le centre.

2° *La courbe est une parabole.* — Dans ce cas, les droites qui ont pour équations

$$f'_x=0 \quad f'_y=0$$

sont parallèles ; par suite, il existe des constantes λ et μ telles, que l'on a identiquement

$$f'_y = \lambda f'_x + \mu; \tag{8}$$

l'équation (7) des diamètres devient donc

$$(\alpha + \lambda\beta) f'_x + \mu\beta = 0;$$

donc, dans la parabole, tous les diamètres sont parallèles entre eux.

**Remarque.** — Lorsque l'on a $\alpha + \lambda\beta = 0$, le diamètre est rejeté à l'infini et les cordes correspondantes sont parallèles à la direction commune des diamètres, c'est-à-dire à la droite qui a pour équation $f'_x = 0$. En effet, en égalant à zéro le coefficient de $x$ dans l'identité (8), on obtient la relation $B = A\lambda$, et le coefficient angulaire $\frac{\beta}{\alpha}$ des cordes est alors donné par l'équation

$$\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{\lambda} = -\frac{A}{B}.$$

3° *La courbe se compose de deux droites parallèles.* — Dans ce cas, les droites qui ont pour équations

$$f'_x = 0 \quad f'_y = 0$$

sont confondues; par suite, il existe une constante λ telle, que l'on a identiquement

$$f'_y = \lambda f'_x;$$

l'équation (7) des diamètres devient

$$(\alpha + \lambda\beta) f'_x = 0;$$

donc tous les diamètres sont confondus avec la ligne des centres.

**Remarque.** — Quand le coefficient $\alpha + \lambda\beta$ est nul, l'équation précédente devient identique, et les cordes correspondantes sont parallèles à la ligne des centres.

*Relation entre le coefficient angulaire d'un diamètre et celui des cordes conjuguées.* — Appelons $m$ le coefficient angulaire des cordes, l'équation du diamètre sera

$$f'_x + m f'_y = 0,$$

ou

$$Ax + By + D + m(Bx + Cy + E) = 0;$$

le coefficient angulaire $m'$ du diamètre a donc pour expression

$$m' = -\frac{A + Bm}{B + Cm},$$

et les deux coefficients angulaires $m$ et $m'$ sont liés par la relation

$$Cmm' + B(m + m') + A = 0.$$

## Diamètres conjugués.

**120. Définition.** — *On dit que deux diamètres sont conjugués quand chacun d'eux partage en parties égales les cordes parallèles à l'autre.*

Tous les diamètres de la parabole étant parallèles entre eux, cette courbe n'admet pas de diamètres conjugués.

Nous allons montrer que dans l'ellipse et dans l'hyperbole chaque diamètre a un conjugué.

Soient OA un diamètre quelconque, $m$ son coefficient angulaire et $m'$ celui d'une corde conjuguée CD ; menons le diamètre OB parallèle à CD, et appelons $m''$ le coefficient angulaire d'une corde C'D' conjuguée de OB ; nous aurons les deux relations

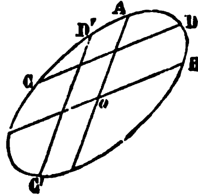


Fig. 99.

$$Cmm' + B(m + m') + A = 0$$
$$Cm'm'' + B(m' + m'') + A = 0.$$

On a donc $m'' = m$, et les cordes C'D' sont parallèles au diamètre OA ; il résulte de là que les deux diamètres OA, OB sont conjugués.

## Équation de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à deux diamètres conjugués.

Si l'on prend pour axes de coordonnées deux diamètres conjugués d'une ellipse ou d'une hyberbole, à chaque valeur de $x$ correspondront deux valeurs de $y$ égales et de signes contraires, et de même à chaque valeur de $y$ correspondront deux valeurs de $x$ égales et de signes contraires : l'équation de la courbe ne devra

donc contenir que des puissances paires des coordonnées et sera de la forme

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0.$$

### Diamètres des courbes algébriques dont le degré est quelconque.

**121.** Quand le degré d'une courbe est supérieur au second, les diamètres ne sont plus en général des droites. Soit $m$ le degré de la courbe; toutes les cordes parallèles à une direction donnée la rencontreront en $m$ points, et le nombre des segments compris entre deux quelconques de ces points sera $\frac{m(m-1)}{2}$; les milieux de chacun de ces segments seront les points où la corde rencontre le diamètre; par suite, ce diamètre sera une courbe de l'ordre $\frac{m(m-1)}{2}$.

Il est facile de trouver l'équation des diamètres d'une courbe d'ordre $m$.

Soit

$$f(x,y) = 0$$

l'équation de la courbe; définissons encore les coordonnées d'un point quelconque d'une corde par les équations

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \rho;$$

les valeurs de $\rho$ qui correspondent aux points $A_1, A_2, \ldots, A_m$ où la corde rencontre la courbe sont données par l'équation

$$(9) \qquad f(x_0 + \rho\alpha, y_0 + \rho\beta) = 0.$$

Faisons coïncider le point $P(x_0 y_0)$ avec le milieu M de l'un des segments $A_1 A_2$ par exemple; l'équation (9) aura alors deux racines égales et de signes contraires $\pm \frac{MA_1}{oD}$.

Dans cette équation, groupons ensemble tous les termes qui contiennent des puissances de $\rho$ de même parité, elle prendra la forme suivante:

$$(10) \qquad \varphi(\rho^2) + \rho\psi(\rho^2) = 0;$$

les racines $\pm \frac{MA_1}{oD}$ satisferont à l'équation (10) et à l'équation

$$\varphi(\rho^2) - \rho\psi(\rho^2) = 0;$$

par suite, les deux équations

$$\varphi(\rho^2) = 0 \quad \psi(\rho^2) = 0$$

auront une racine commune $\rho^2 = \left(\frac{MA_1}{oD}\right)^2$ ; en éliminant $\rho^2$ entre ces deux équations, on obtiendra l'équation du diamètre.

## Diamètres de Newton.

**122.** On peut modifier la définition des diamètres de manière que dans une courbe d'ordre quelconque les diamètres soient des lignes droites.

**Définition.** — *On appelle diamètre d'une courbe le lieu des centres des moyennes distances des points d'intersection de la courbe avec une sécante quelconque parallèle à une direction donnée.*

Cette définition a été donnée par Newton. (*Enumeratio linearum tertii ordinis.*)

Pour démontrer que dans une courbe d'ordre quelconque les diamètres ainsi définis sont des droites, groupons ensemble les termes du même degré dans l'équation de la courbe ; cette équation devient

$$\varphi(x, y) + \psi(x, y) + \ldots = 0;$$

représentons toujours la corde par les équations

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \rho;$$

les valeurs de $\rho$ qui correspondent aux points d'intersection de la courbe et de la sécante sont les racines de l'équation

$$\rho^m \varphi(\alpha, \beta) + \rho^{m-1}[x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta)] + A\rho^{m-2} + \ldots = 0.$$

Désignons par S la somme des racines de cette équation, les coordonnées du centre des moyennes distances des points d'in-

tersection de la courbe et de la sécante auront pour expression

$$x = x_0 + \frac{\alpha S}{m} \quad y = y_0 + \frac{\beta S}{m}.$$

Faisons coïncider le point $P(x_0, y_0)$ avec le centre des moyennes distances, les formules précédentes montrent que S devra être nul ; donc l'équation du diamètre est

$$x_0 \varphi'_\alpha(\alpha, \beta) + y_0 \varphi'_\beta(\alpha, \beta) + \psi(\alpha, \beta) = 0.$$

Ces diamètres sont donc des lignes droites.

### AXES.

**123. Définition.** — *On appelle axe d'une courbe une droite qui partage la courbe en deux parties symétriques.*

Les diamètres des courbes du second ordre sont des droites ; on obtiendra donc les axes de ces courbes en cherchant ceux de leurs diamètres qui sont perpendiculaires aux cordes qu'ils divisent en deux parties égales. Les cordes conjuguées d'un axe sont dites *principales*.

Soient $u, v$ les paramètres directeurs d'une direction $o$D, l'équation de cette direction et celle de l'axe correspondant seront respectivement

$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v}$$

et

$$(11) \qquad x\frac{\varphi'_u}{2} + y\frac{\varphi'_v}{2} + Du + Ev = 0.$$

Le diamètre sera un axe s'il est perpendiculaire à la direction $o$D, c'est-à-dire si l'on a

$$(12) \qquad \frac{\varphi'_u}{\psi'_u} = \frac{\varphi'_v}{\psi'_v},$$

en posant

$$\psi(u, v) = u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta = 1.$$

Désignons par S la valeur commune des deux rapports précé-

dents, le problème sera ramené à la résolution des équations suivantes :

$$(13)\qquad \varphi'_u - S\psi'_u = 0 \qquad \varphi'_v - S\psi'_v = 0$$
$$(14)\qquad u^2 + v^2 + 2uv\cos\theta = 1$$

où les inconnues sont S, $u$, $v$.

Les équations (13) développées deviennent

$$(15)\qquad \begin{aligned}(A - S)u + (B - S\cos\theta)v &= 0\\ (B - S\cos\theta)u + (C - S)v &= 0.\end{aligned}$$

Ces équations linéaires et homogènes par rapport à $u$, $v$ doivent être vérifiées par des valeurs de ces inconnues dont l'une au moins n'est pas nulle, car le point directeur D ne coïncide pas avec l'origine; le déterminant formé par les coefficients de ces inconnues doit donc être nul, et l'on a, pour déterminer l'inconnue auxiliaire S, l'équation

$$(16)\qquad \begin{vmatrix} A - S & B - S\cos\theta \\ B - S\cos\theta & C - S \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en développant, l'équation

$$S^2\sin^2\theta - (A + C - 2B\cos\theta)S + AC - B^2 = 0.$$

Nous désignerons par $a$ le premier membre de l'équation précédente qui est appelée *l'équation en* S.

### ÉTUDE DE L'ÉQUATION EN S.

**124.** Dans le premier membre de l'équation en S remplaçons successivement S par $-\infty$, A, C, $+\infty$ ; en supposant, pour fixer les idées, A moindre que C, les résultats auront les signes indiqués dans le tableau suivant :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| S | $-\infty$ | A | C | $+\infty$ |
| $a$ | $+$ | $-(B - A\cos\theta)^2$ | $-(B - C\cos\theta)^2$ | $+$. |

On voit que l'équation en S a ses racines réelles et généralement inégales; l'une d'elles $S_1$ est comprise entre $-\infty$ et A, l'autre $S_2$ entre C et $+\infty$.

Pour que les racines $S_1$, $S_2$ soient égales, il faut que les quantités A, C deviennent égales et annulent $a$; on doit donc avoir

$$A = C = \frac{B}{\cos\theta}.$$

La courbe est alors une circonférence de cercle.

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes, car, quand elles sont remplies, l'équation (16) devient

$$(A - S)^2 \sin^2\theta = 0.$$

**Corollaire.** — *L'équation en* S *ne peut pas avoir deux racines nulles.* — En effet, on aurait alors à la fois

$$A = C = B = 0,$$

et l'équation de la courbe ne serait plus du second degré.

**Remarque.** — Pour que l'équation en S ait *une racine nulle* il faut et il suffit que l'on ait

$$AC - B^2 = 0,$$

ou que la courbe soit une *parabole*.

### ÉTUDE DE L'AXE ET DE LA DIRECTION PRINCIPALE.

**125.** Nous allons maintenant faire l'étude de l'axe et de la corde principale correspondante en tenant compte de la nature des racines de l'équation en S.

Nous remarquerons d'abord qu'en vertu des relations (13), l'équation (11) de l'axe prend la forme

$$(17) \qquad S(x\psi'_u + y\psi'_v) + 2(Du + Ev) = 0.$$

**Théorème I.** — *A une racine simple de l'équation en* S *correspondent une direction principale déterminée et un seul axe.*

En effet, cette racine simple n'annulant pas tous les éléments du déterminant $a$, les équations (15) se réduisent *à une;* cette équation unique détermine le rapport de l'une des quantités $u$, $v$ à l'autre.

A cette racine simple correspondent donc une seule direction principale et un seul axe.

**Théorème II.** — *A une racine double de l'équation en* S *correspondent comme directions principales toutes les directions du plan et une infinité d'axes passant par un même point.*

En effet, la racine double annulant tous les éléments du déterminant $a$, les équations (15) se réduisent à des identités; toute direction du plan peut donc être considérée comme principale.

Dun autre côté, l'équation (17) de l'axe contient un paramètre arbitraire $\frac{u}{v}$ au premier degré; il y a donc une infinité d'axes passant par un même point I défini par les équations

$$S\psi'_x + 2D = 0 \qquad S\psi'_y + 2E = 0.$$

On le voit, en remarquant que la fonction $\psi(u, v)$ étant *homogène et du second degré*, on a l'identité

$$x\psi'_u + y\psi'_v \equiv u\psi'_x + v\psi'_y.$$

La courbe est un cercle ayant pour centre le point I.

**Théorème III.** — *Les directions principales qui correspondent à deux racines différentes de l'équation en* S *sont perpendiculaires entre elles.*

Soient $(u_1, v_1)$, $(u_2, v_2)$ les paramètres directeurs des directions principales qui correspondent aux racines $S_1, S_2$ supposées distinctes. On a, en vertu des relations (13), les relations

$$\begin{matrix} S_1\psi'_{u_1} = \varphi'_{u_1} \\ S_1\psi'_{v_1} = \varphi'_{v_1} \end{matrix} \quad \text{et} \quad \begin{matrix} S_2\psi'_{u_2} = \varphi'_{u_2} \\ S_2\psi'_{v_2} = \varphi'_{v_2} \end{matrix};$$

d'où l'on déduit

$$S_1(u_2\psi'_{u_1} + v_2\psi'_{v_1}) - S_2(u_1\psi'_{u_2} + v_1\psi'_{v_2}) = u_2\varphi'_{u_1} + v_2\varphi'_{v_1} - u_1\varphi'_{u_2} - v_1\varphi'_{v_2}$$

ou bien

$$(S_1 - S_2)(u_2\psi'_{u_1} + v_2\psi'_{v_1}) = 0,$$

car $\theta(u, v)$ étant une fonction homogène et du second degré des variables $u, v$, on a l'identité

$$u\theta'_{u'} + v\theta'_{v'} \equiv u'\theta'_u + v'\theta'_v.$$

Comme $S_1 - S_2$ n'est pas nul par hypothèse, on aura

$$u_2\psi'_{u_1} + v_2\psi'_{v_1} = 0,$$

et cette relation exprime justement que les deux directions principales considérées sont perpendiculaires entre elles.

Des théorèmes précédents, on déduit un corollaire important.

**Corollaire.** — *Dans toute courbe du second ordre il y a toujours au moins deux directions principales formant un angle droit.*

En effet, si les racines $S_1, S_2$ de l'équation en S sont inégales, les deux directions principales qui leur correspondent sont perpendiculaires.

Si les deux racines $S_1, S_2$ sont égales, deux directions quelconques perpendiculaires entre elles sont principales.

**126. Nombre des axes.** — Pour déterminer le nombre des axes à distance finie, nous distinguerons deux cas.

1° *L'équation en* S *n'a pas de racine nulle.* — La courbe du genre ellipse ou du genre hyperbole a *deux* axes situés à distance finie, si les racines $S_1, S_2$ sont *distinctes* (**Théor. I**); elle en a une infinité si ces racines sont égales, et la courbe est un cercle (**Théor. II**).

2° *L'équation en* S *a une racine nulle.* — A la racine qui n'est pas nulle correspond *un seul* axe.

Pour la racine nulle, l'équation (17) de l'axe se réduit à

$$Du + Ev = 0.$$

Si la quantité $Du + Ev$ n'est pas nulle, l'axe correspondan à la racine nulle est *rejeté à l'infini*. La courbe est une *parabole*, car les équations (15) où l'on doit faire $S = 0$ deviennent

$$Au + Bv = 0 \qquad Bu + Cv = 0;$$

elles expriment que les droites qui déterminent le centre sont *parallèles*.

Si la quantité $Du + Ev$ est nulle, l'axe correspondant à la racine nulle est *indéterminé*.

La courbe est formée de *deux droites parallèles*, car on a les relations

$$Au + Bv = 0 \qquad Bu + Cv = 0 \qquad Du + Ev = 0;$$

elles expriment que les droites qui déterminent le centre sont *confondues*.

**127. Remarque.** — Dans les applications, on forme ordinairement comme il suit l'équation des axes d'une courbe du second ordre.

L'axe étant un diamètre a une équation de la forme

$$uf'_x + vf'_y = 0,$$

et les paramètres directeurs $u, v$ sont liés par la relation (12) qui est homogène.

Nous distinguerons deux cas.

1° *La courbe est du genre ellipse ou du genre hyperbole.* — On remplacera, dans la relation (12), $u$ et $v$ par les quantités $-f'_y, f'_x$ qui leur sont respectivement proportionnelles.

On obtient ainsi, pour représenter les deux axes, l'équation

$$(B - C\cos\theta)(f'_x)^2 - (A - C) f'_x f'_y + (A\cos\theta - B)(f'_y)^2 = 0.$$

2° *La courbe est une parabole* — Tous les diamètres étant parallèles entre eux et en particulier à celui dont l'équation est

$$\tfrac{1}{2} f'_x = Ax + By + D = 0,$$

l'axe a pour coefficient angulaire $-\frac{A}{B}$. Le coefficient angulaire $\frac{v}{u}$ des cordes principales satisfera donc à la relation

$$1 + \left(\frac{v}{u} - \frac{A}{B}\right)\cos\theta - \frac{v}{u}\cdot\frac{A}{B} = 0;$$

en y remplaçant, comme dans le cas précédent, $u$ par $-f'_y$, $v$ par $f'_x$, on a, pour représenter l'axe de la parabole, l'équation

$$(B\cos\theta - A) f'_x + (A\cos\theta - B) f'_y = 0.$$

**Sommets.** — *On appelle sommets d'une courbe du second ordre les points où les axes de symétrie la rencontrent.*

# CHAPITRE IV

## RÉDUCTION DE L'ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ.

**128.** On sait que, dans toute courbe du second ordre, il y a toujours au moins deux directions de cordes principales formant un angle droit.

Nous nous proposons de trouver la forme que prend l'équation de la courbe quand on choisit les axes de coordonnées parallèles à ces directions principales, et de simplifier ensuite l'équation ainsi obtenue.

Soit

$$(1) \qquad f = \varphi(x, y) + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation de la courbe rapportée à des axes *quelconques* $ox, oy$, où l'on a posé

$$\varphi(x, y) = Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy.$$

Les formules qui permettent de passer des anciens axes aux nouveaux $ox'$, $oy'$ formés par deux directions principales perpendiculaires entre elles, sont

$$x = ux' + u'y'$$
$$y = vx' + v'y'$$

en représentant par $(u, v)$, $(u', v')$ les paramètres directeurs des demi-droites $ox'$, $oy'$.

Après ce changement d'axes, l'équation de la courbe deviendra

$$A_1 x'^2 + C_1 y'^2 + 2B_1 x'y' + 2D_1 x' + 2E_1 y' + F = 0$$

en posant

$$D_1 = Du + Ev$$
$$E_1 = Du' + Ev'.$$

On peut donner des formes très simples aux expressions des coefficients $A_1$, $C_1$, $B_1$.

Pour obtenir $A_1$, par exemple, il faut chercher le coefficient de $x'^2$ dans le développement de la fonction

$$\varphi(ux' + u'y', vx' + v'y'),$$

et l'on peut évidemment, pour simplifier les calculs, supposer $y' = 0$. On trouve immédiatement

$$A_1 = \varphi(u, v).$$

En formant le coefficient de $x'y'$ dans le même développement, on obtient la relation

$$2B_1 = u'\varphi'_u + v'\varphi'_v.$$

Soient $S_1$, $S_2$ les racines de l'équation en S auxquelles correspondent respectivement les directions principales $ox'$, $oy'$; en considérant en particulier la racine $S_1$, on aura

$$\frac{\varphi'_u}{\psi'_u} = \frac{\varphi'_v}{\psi'_v} = S_1.$$

On déduit de là

$$A_1 = \varphi(u, v) = \tfrac{1}{2}(u\varphi'_u + v\varphi'_v) = \tfrac{1}{2}S_1(u\psi'_u + v\psi'_v) = S_1\psi(u, v);$$

donc

$$A_1 = S_1$$

car $\psi(u, v) = 1$.

On a en outre

$$2B_1 = u'\varphi'_u + v'\varphi'_v = 2S_1(u'\psi'_u + v'\psi'_v) = 0.$$

En résumé, quand on rapporte une courbe du second ordre à deux axes respectivement parallèles à deux directions principales formant un angle droit, le terme en $x'y'$ disparaît, et les coefficients de $x'^2$ et de $y'^2$ ont pour valeurs

$$A_1 = S_1 \qquad C_1 = S_2.$$

L'équation de la courbe devient donc

$$S_1x'^2 + S_2y'^2 + 2D_1x' + 2E_1y' + F = 0. \tag{2}$$

Si l'on transporte l'origine au point $(x_0, y_0)$, l'équation (2) devient à son tour

$$(3) \qquad S_1 X^2 + S_2 Y^2 + 2 D_2 X + 2 E_2 Y + F_1 = 0$$

en posant

$$D_2 = S_1 x_0 + D_1 \qquad E_2 = S_2 y_0 + E_1$$
$$F_1 = S_1 x_0^2 + S_2 y_0^2 + 2 D_1 x_0 + 2 E_1 y_0 + F.$$

Nous allons distinguer plusieurs cas.

1° *La courbe appartient à la première classe.* — L'équation en S n'a pas de racine nulle; on peut donc poser

$$x_0 = -\frac{D_1}{S_1} \qquad y_0 = -\frac{E_1}{S_2},$$

et l'équation (3) devient

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 + F_1 = 0.$$

2° *La courbe appartient à la deuxième classe.* — L'équation en S a une seule racine nulle $S_1$ par exemple. On aura alors $D_1 \gtrless 0$, car, s'il en était autrement, la courbe aurait une ligne de centres.

On peut déterminer $y_0$, $x_0$ par les équations

$$S_2 y_0 + E_1 = 0$$
$$S_2 y_0^2 + 2 D_1 x_0 + 2 E_1 y_0 + F = 0,$$

et l'équation (3) devient

$$S_2 Y^2 + 2 D_1 X = 0.$$

3° *La courbe appartient à la troisième classe.* — L'équation en S a encore une seule racine nulle $S_1$; on aura alors $D_1 = 0$, car la courbe a une ligne de centres.

On peut prendre $x_0 = 0$ et déterminer $y_0$ par l'équation

$$S_2 y_0 + E_1 = 0;$$

le coefficient $F_1$ aura pour valeur

$$F_1 = S_2 y_0^2 + 2 E_1 y_0 + F,$$

et l'équation (3) deviendra

$$S_2 Y^2 + F_1 = 0.$$

En résumé, nous voyons que l'équation d'une courbe du second ordre peut être ramenée à l'une des formes suivantes :

$$S_1X^2 + S_2Y^2 + F_1 = 0$$
$$S_2Y^2 + 2D_1X = 0$$
$$S_2Y^2 + F_1 = 0.$$

La première de ces équations représente une courbe du *genre ellipse* ou du *genre hyperbole* rapportée à ses deux axes.

La deuxième représente une *parabole;* la droite OX est l'axe de symétrie, et la droite OY qui rencontre la courbe en deux points confondus avec l'origine, est la tangente au *sommet* de la parabole.

La troisième représente *deux droites parallèles* rapportées à la ligne des centres et à une perpendiculaire *quelconque* sur cette ligne des centres.

# CHAPITRE V

## INVARIANTS.

**129**. Soit $f(x, y, z, \ldots, t)$ une fonction des variables $x, y, z, \ldots, t$; si l'on pose

$$\begin{aligned} x &= a_1 X + b_1 Y + \ldots + l_1 T \\ y &= a_2 X + b_2 Y + \ldots + l_2 T \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t &= a_n X + b_n Y + \ldots + l_n T \end{aligned}$$

les quantités $a_i, b_i, \ldots, l_i$ étant des constantes et les quantités X, Y, ..., T de nouvelles variables, on dit que l'on fait *une substitution linéaire*. Après cette substitution, la fonction $f$ devient une fonction F (X, Y, ..., T) qui est dite la *transformée* de $f$; enfin le déterminant des coefficients des variables X, Y, ..., T dans les formules de transformation est appelé le *module* de la substitution.

**Invariant d'une fonction.** — On appelle *invariant* d'une fonction $f$ toute fonction $\varphi$ de ses coefficients, telle que, si l'on fait une substitution linéaire, la fonction *semblable* des coefficients de la transformée est égale à la première fonction $\varphi$ multipliée par une puissance du module M de la substitution.

Ainsi, soit $f(x, y, \ldots, \alpha, \beta, \gamma \ldots)$ une fonction ayant pour transformée F (X, Y, Z, ..., A, B, C, ...), les quantités $\alpha, \beta, \ldots$, A, B, ... étant des constantes; si l'on a

$$\varphi(A, B, C, \ldots) = M^p \varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$

la fonction $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ sera un invariant de la fonction $f$.

**Invariant de plusieurs fonctions.** — On appelle *invariant* de plusieurs fonctions $f_1, f_2, \ldots$ toute fonction $\varphi$ de leurs coefficients, telle que, si l'on fait une substitution linéaire, la fonction *semblable* des coefficients des transformées est égale à la première fonction $\varphi$ multipliée par une puissance du module de la substitution.

Ainsi, soient

$$f_1(x, y, z, \ldots, \alpha_1, \beta_1, \ldots), f_2(x, y, z, \ldots, \alpha_2, \beta_2, \ldots), \ldots$$

des fonctions ayant respectivement pour transformées

$$F_1(X, Y, Z, \ldots, A_1, B_1, \ldots), F_2(X, Y, Z, \ldots, A_2, B_2, \ldots), \ldots,$$

les quantités $\alpha_i, \beta_i, \ldots, A_i, B_i, \ldots$ étant des constantes ; si l'on a

$$\varphi(A_1, B_1, \ldots, A_2, B_2 \ldots) = M^p \varphi(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_2, \beta_2, \ldots),$$

la fonction $\varphi(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_2, \beta_2, \ldots)$ sera un invariant des fonctions $f_1, f_2, \ldots$.

Dans ce qui suit, pour simplifier l'écriture, nous ne considérerons que des fonctions de trois variables; mais tout ce que nous dirons est applicable à un nombre *quelconque* de variables.

**130. Lemme.** — *Soient* U, V, W *trois fonctions des variables* $x, y, z$ ; *si l'on pose*

$$(1)\qquad \begin{aligned} x &= a\,X + b\,Y + c\,Z \\ y &= a'X + b'Y + c'Z \\ z &= a''X + b''Y + c''Z \end{aligned}$$

*on aura*

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} U'_X & U'_Y & U'_Z \\ V'_X & V'_Y & V'_Z \\ W'_X & W'_Y & W'_Z \end{vmatrix} = M \begin{vmatrix} U'_x & U'_y & U'_z \\ V'_x & V'_y & V'_z \\ W'_x & W'_y & W'_z \end{vmatrix},$$

M *étant le module de la substitution linéaire.*

En effet, le théorème des fonctions composées donne les relations

$$\begin{aligned} U'_X &= aU'_x + a'U'_y + a''U'_z & V'_X &= aV'_x + a'V'_y + a''V'_z & W'_X &= aW'_x + a'W'_y + a''W'_z \\ U'_Y &= bU'_x + b'U'_y + b''U'_z & V'_Y &= bV'_x + b'V'_y + b''V'_z & W'_Y &= bW'_x + b'W'_y + b''W'_z \\ U'_Z &= cU'_x + c'U'_y + c''U'_z & V'_Z &= cV'_x + c'V'_y + c''V'_z & W'_Z &= cW'_x + c'W'_y + c''W'_z \end{aligned}$$

elles montrent que le déterminant

$$\begin{vmatrix} U'_X & U'_Y & U'_Z \\ V'_X & V'_Y & V'_Z \\ W'_X & W'_Y & W'_Z \end{vmatrix}$$

est le produit des deux déterminants

$$M = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} U'_x & U'_y & U'_z \\ V'_x & V'_y & V'_z \\ W'_x & W'_y & W'_z \end{vmatrix}$$

**Définition.** — *Soit $f$ une fonction homogène et du second degré des variables $x, y, z$; on appelle discriminant de cette fonction le déterminant*

$$\begin{vmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{z^2} \end{vmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que cette définition s'accorde avec celle qui a été donnée précédemment (103).

**131. Théorème I.** — *Le discriminant d'une fonction homogène et du second degré est un invariant.*

Soit $f$ une fonction homogène et du second degré qui a pour transformée F quand on fait la substitution linéaire définie par les formules (1) ; appelons $\Delta$ et $\Delta'$ les discriminants des fonctions $f$ et F.

De la relation

$$F(X, Y, Z) = f(x, y, z)$$

on tire

$$(3) \qquad \begin{aligned} F'_X &= a f'_x + a' f'_y + a'' f'_z \\ F'_Y &= b f'_x + b' f'_y + b'' f'_z \\ F'_Z &= c f'_x + c' f'_y + c'' f'_z \end{aligned}.$$

Ces relations montrent que $F'_X$, $F'_Y$, $F'_Z$ peuvent être considérées comme des fonctions des variables $x, y, z$, qui sont elles-mêmes des fonctions linéaires des variables X, Y, Z ; on peut donc leur appliquer le lemme établi plus haut. En remplaçant dans l'égalité (2) U, V, W respectivement par $F'_X$, $F'_Y$, $F'_Z$, on obtient l'égalité

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} F''_{X^2} & F''_{XY} & F''_{XZ} \\ F''_{YX} & F''_{Y^2} & F''_{YZ} \\ F''_{ZX} & F''_{ZY} & F''_{Z^2} \end{vmatrix} = M \begin{vmatrix} F''_{Xx} & F''_{Xy} & F''_{Xz} \\ F''_{Yx} & F''_{Yy} & F''_{Yz} \\ F''_{Zx} & F''_{Zy} & F''_{Zz} \end{vmatrix};$$

or, des relations (3) on déduit

$$\begin{array}{lll} F''_{Xx} = a f''_{x^2} + a' f''_{yx} + a'' f''_{zx} & F''_{Yx} = b f''_{x^2} + b' f''_{yx} + b'' f''_{zx} & F''_{Zx} = c f''_{x^2} + c' f''_{yx} + c'' f''_{zx} \\ F''_{Xy} = a f''_{xy} + a' f''_{y^2} + a'' f''_{zy} & F''_{Yy} = b f''_{xy} + b' f''_{y^2} + b'' f''_{zy} & F''_{Zy} = c f''_{xy} + c' f''_{y^2} + c'' f''_{zy} \\ F''_{Xz} = a f''_{xz} + a' f''_{yz} + a'' f''_{z^2} & F''_{Yz} = b f''_{xz} + b' f''_{yz} + b'' f''_{z^2} & F''_{Zz} = c f''_{xz} + c' f''_{yz} + c'' f''_{z^2} \end{array}$$

par conséquent dans l'égalité (4), le coefficient de M est égal au

produit de M par le discriminant $\Delta$ de la fonction $f$, et cette égalité prend la forme suivante :

$$\Delta' = M^2 \Delta,$$

donc le discriminant $\Delta$ est un invariant.

**Définition.** — *Soient $f$ et $\varphi$ deux fonctions homogènes et du second degré; nous appellerons équation en* S *l'équation obtenue en égalant à zéro le discriminant de la fonction $f - S\varphi$.*

**132. Théorème II.** — *Les coefficients de l'équation en* S *relative aux deux fonctions homogènes et du second degré $f$ et $\varphi$ sont des invariants de ces deux fonctions.*

Soient en effet $f_1$ et $\varphi_1$ les transformées des fonctions $f$ et $\varphi$; la fonction $f - S\varphi$ aura pour transformée $f_1 - S\varphi_1$; donc, si l'on appelle $\Delta$ et $\Delta_1$ les discriminants des fonctions $f - S\varphi$ et $f_1 - S\varphi_1$, on aura, *quel que soit* S (Théorème I), la relation

$$\Delta_1 = M^2 \Delta;$$

par conséquent les coefficients des puissances de S dans $\Delta$ sont des invariants des deux fonctions $f$ et $\varphi$.

### APPLICATION DE LA THÉORIE DES INVARIANTS AUX COURBES DU SECOND ORDRE.

La théorie des invariants va nous permettre d'établir le théorème suivant dont nous ferons un fréquent usage.

**133. Théorème III.** — *Soit*

$$f = Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

*l'équation d'une courbe du second ordre rapportée à des axes faisant entre eux un angle $\theta$; les trois expressions*

$$\frac{\delta}{\sin^2\theta} \qquad \frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta} \qquad \frac{\Delta}{\sin^2\theta}$$

*conservent la même valeur quand on change les axes de coordonnées.*

Considérons d'abord les deux expressions

$$\frac{\delta}{\sin^2\theta} \qquad \frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

qui ne dépendent que des coefficients A, B, C des termes du second degré dans la fonction $f$.

Quand on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, les coefficients A, B, C ne changent pas ; donc les deux expressions précédentes conservent la même valeur. Reste donc à démontrer qu'il en est encore de même quand on change les directions des axes en conservant l'origine.

Après cette transformation des coordonnées, la fonction $f$ deviendra

$$f_1 = A_1 X^2 + C_1 Y^2 + 2B_1 XY + 2D_1 X + 2E_1 Y + F,$$

et les termes du second degré de la nouvelle fonction proviendront uniquement des termes du second degré de la première ; par conséquent la fonction

$$\varphi = Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy$$

deviendra

$$\varphi_1 = A_1 X^2 + C_1 Y^2 + 2 B_1 XY.$$

Associons à la fonction $\varphi$ la fonction $x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta$, qui représente le carré de la distance d'un point *quelconque* du plan à l'origine ; après qu'on aura changé les directions des axes, elle devra représenter encore le carré de la distance d'un point *quelconque* du plan à la *même* origine ; donc elle deviendra $X^2 + Y^2 + 2XY\cos\theta_1$, en désignant par $\theta_1$ l'angle des nouveaux axes.

Les équations en S relatives aux fonctions $\varphi$ et $x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta$ d'une part et à leurs transformées d'autre part sont

$$S^2\sin^2\theta - (A + C - 2B\cos\theta)S - \delta = 0$$
$$S^2\sin^2\theta_1 - (A_1 + C_1 - 2B_1\cos\theta_1)S - \delta_1 = 0.$$

Nous savons que les coefficients de la première de ces équations sont des invariants des deux fonctions $\varphi$ et $x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta$ considérées simultanément ; or, le module de la substitution linéaire définie par les formules

$$x = \frac{X\sin(\theta - \alpha) + Y\sin(\theta - \beta)}{\sin\theta} \qquad y = \frac{X\sin\alpha + Y\sin\beta}{\sin\theta}$$

pour expression

$$M = \frac{1}{\sin^2\theta}\begin{vmatrix} \sin(\theta - \alpha) & \sin(\theta - \beta) \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix} = \pm \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta}.$$

On a donc les relations

$$A_1 + C_1 - 2B_1 \cos\theta_1 = \frac{\sin^2\theta_1}{\sin^2\theta}(A + C - 2B\cos\theta) \quad \delta_1 = \frac{\sin^2\theta_1}{\sin^2\theta}\delta.$$

On en tire

$$\frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{A_1 + C_1 - 2B_1\cos\theta_1}{\sin^2\theta_1} \qquad \frac{\delta}{\sin^2\theta} = \frac{\delta_1}{\sin^2\theta_1};$$

donc les deux expressions $\frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta}$, $\frac{\delta}{\sin^2\theta}$ conservent la même valeur quand on fait une transformation générale de coordonnées.

Considérons maintenant l'expression $\frac{\Delta}{\sin^2\theta}$; comme elle dépend des coefficients de tous les termes de la fonction $f$, on devra changer à la fois l'origine et les directions des axes; or, cette transformation revient à faire dans la fonction homogène et du second degré

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2$$

une substitution linéaire définie par les formules

$$x = x_0 Z + \frac{X\sin(\theta - \alpha) + Y\sin(\theta - \beta)}{\sin\theta}$$
$$y = y_0 Z + \frac{X\sin\alpha + Y\sin\beta}{\sin\theta}$$
$$z = Z$$

et à poser ensuite $z = Z = 1$. Le discriminant de cette fonction homogène est justement $\Delta$, et celui de sa transformée est la quantité $\Delta_1$ qui correspond à la fonction

$$f_1 = A_1X^2 + C_1Y^2 + 2B_1XY + 2D_1X + 2E_1Y + F_1;$$

de plus, le module de notre substitution linéaire a encore pour expression $\pm\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta}$; donc on a (Théorème I)

$$\Delta_1 = \frac{\sin^2\theta_1}{\sin^2\theta}\Delta;$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Delta}{\sin^2\theta} = \frac{\Delta_1}{\sin^2\theta_1}.$$

134. Nous allons appliquer le théorème précédent à la réduction de l'équation du second ordre à ses formes les plus simples.

**Problème I.** — *Étant donnée l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole rapportée à des axes faisant entre eux un angle* $\theta$, *trouver : 1° les coefficients de l'équation*

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 + F_1 = 0,$$

*qui représente la courbe rapportée à ses axes de symétrie; 2° les équations des deux axes de symétrie.*

Soit

$$f = Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole rapportée à des axes quelconques $ox, oy$ ; quand on rapporte cette courbe aux axes de symétrie CX, CY, le premier membre de l'équation $f = 0$ devient

$$S_1 X^2 + S_2 Y^2 + F_1.$$

Le théorème III donne les relations

$$\frac{\Delta}{\sin^2\theta} = F_1 S_1 S_2 \qquad \frac{\delta}{\sin^2\theta} = -S_1 S_2$$
$$\frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta} = S_1 + S_2;$$

des deux premières équations on tire $F_1 = -\frac{\Delta}{\delta}$, et les deux dernières montrent que $S_1, S_2$ sont les racines de l'équation suivante :

$$S^2 \sin^2\theta - (A + C - 2B\cos\theta) S - \delta = 0.$$

Pour résoudre la seconde partie du problème, on pourrait appliquer la théorie des axes, mais cette méthode ne ferait pas connaître celle des deux droites ainsi obtenues, qui représente l'axe CX et celle qui représente l'axe CY. Pour lever cette difficulté, on commence par transporter l'origine au centre de la courbe, ce qui revient à la rapporter aux axes $Cx'$, $Cy'$ parallèles aux axes primitifs ; l'équation

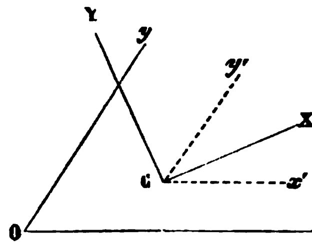


Fig. 100

de la courbe devient :

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + F_1 = 0;$$

il résulte de là que, quand on passera des axes $Cx'$, $Cy'$ aux axes CX, CY, la fonction $Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy$ aura pour transformée la fonction $S_1X^2 + S_2Y^2$. D'un autre côté, la fonction $x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta$ a pour transformée $X^2 + Y^2$; donc la fonction

$$u = (A - S)x^2 + (C - S)y^2 + 2(B - S\cos\theta)xy$$

aura pour transformée

$$u_1 = (S_1 - S)X^2 + (S_2 - S)Y^2.$$

La fonction $u_1$ égalée à zéro représente la droite CX quand on y fait $S = S_1$ et la droite CY quand on y fait $S = S_2$, les axes de coordonnées étant CX, CY ; donc, pour les mêmes valeurs de S, l'équation $u = 0$ représentera les droites CX, CY, les axes de coordonnées étant $Cx'$, $Cy'$. Pour avoir les équations des mêmes droites rapportées aux axes $ox$, $oy$, il suffira de remplacer dans l'équation $u = 0$ les coordonnées $x$ et $y$ par $x - x_0$ et $y - y_0$, en représentant par $x_0$, $y_0$ les coordonnées du centre.

**Remarque.** — Pour $S = S_1$ et pour $S = S_2$ la fonction $u$ est un carré parfait ; on pourra donc remplacer l'équation $u = 0$ par l'équation $u'_x = 0$ ou par l'équation $u'_y = 0$.

**Exemple.** — *Ramener à la forme*

$$S_1X^2 + S_2Y^2 + F_1 = 0$$

*l'équation*

$$2x^2 + y^2 + 2xy - 2x - 4y + 1 = 0,$$

*l'angle des axes étant égal à* $\frac{\pi}{3}$.

On a

$$\Delta = -4 \quad A + C - 2B\cos\theta = 2 \quad \delta = -1 \quad \sin^2\theta = \frac{3}{4};$$

donc $F_1 = -\frac{\Delta}{\delta} = -4$. Quant aux coefficients $S_1$, $S_2$ qui sont racines de l'équation

$$\frac{3}{4}S^2 - 2S + 1 = 0,$$

ils ont pour valeur $S_1 = 2$, $S_2 = \frac{2}{3}$ : la courbe rapportée aux axes de symétrie CX, CY a donc pour équation

$$2X^2 - \frac{2}{3}Y^2 - 4 = 0.$$

On obtiendra les équations des axes de symétrie rapportés aux axes $Cx'$, $Cy'$ en remplaçant successivement S par 2 et par $\frac{2}{3}$ dans l'équation

$$u = 2x^2 + y^2 + 2xy - S(x^2 + y^2 + xy) = 0,$$

ou dans l'équation $u'_y = (2 - S)x + 2(1 - S)y = 0$, ce qui donne les deux équations $y = 0$ et $2x + y = 0$. Les coordonnées du centre ont pour valeurs $x_0 = -1$, $y_0 = 3$; donc les axes de symétrie CX, CY rapportés aux axes primitifs $ox$, $oy$ ont pour équations

$$y - 3 = 0 \quad \text{et} \quad 2x + y - 1 = 0.$$

**Problème II.** — *Étant donnée l'équation d'une parabole rapportée à des axes faisant entre eux un angle θ, trouver : 1° les coefficients de l'équation*

$$S_2 Y^2 + 2D_1 X = 0,$$

*qui représente la courbe rapportée à son axe et à la tangente au sommet ; 2° les équations des nouveaux axes de coordonnées.*

Soit $f = 0$ l'équation donnée de la parabole ; en appliquant le théorème III, on a les relations

$$\frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta} = S_2 \qquad \frac{\Delta}{\sin^2\theta} = -S_2 D_1^2$$

qui font connaître $S_2$ puis $D_1$.

La théorie des axes donnera l'équation de l'axe de symétrie CX, et, en cherchant l'intersection de cette droite avec la parabole, on aura les coordonnées du sommet C ; la droite CY sera dès lors déterminée, puisqu'elle est perpendiculaire sur CX et passe par le point C.

**Remarque.**—On trouve pour $D_1$ deux valeurs égales et de signes contraires : il est facile de montrer que, donner à $D_1$ le signe du coefficient $S_2$, revient à prendre pour axe des abscisses posi-

tives X la portion de l'axe de symétrie *extérieure* à la parabole.

En effet, pour tous les points de la tangente au sommet CY autres que le sommet C, points qui sont *extérieurs* à la parabole, la fonction $S_2Y^2+2D_1X$ se réduit à $S_2Y^2$ et a le signe de $S_2$ : pour tous les points de l'axe des abscisses *positives* X, cette fonction se réduit à $2D_1X$ et a le signe de $D_1$ ; donc, si l'on a donné à $D_1$ le signe du coefficient $S_2$, l'axe des abscisses positives X sera extérieur à la parabole.

**Exemple.** — *Ramener à la forme*

$$S_2Y^2+2D_1X=0$$

*l'équation*

$$4x^2+y^2+4xy+2x-2y-1=0,$$

*l'angle des axes étant égal à* $\frac{\pi}{3}$.

On a

$$A+C-2B\cos\theta=3 \qquad \Delta=-9 \qquad \sin^2\theta=\frac{3}{4};$$

donc $S_2=4$, $D_1=\pm\sqrt{3}$ ; la courbe rapportée à l'axe de symétrie CX et à la tangente au sommet CY a donc pour équation

$$4Y^2-2X\sqrt{3}=0,$$

l'axe des abscisses positives X étant intérieur à la parabole.

On trouve facilement que l'axe de symétrie CX a pour équation $4x+2y+1=0$, et que les coordonnées du sommet sont $x_0=-\frac{1}{24}$, $y_0=-\frac{5}{12}$ ; de plus, les cordes principales sont parallèles à l'axe primitif des abscisses $ox$ ; donc la tangente au sommet CY a pour équation $y+\frac{5}{12}=0$.

**Problème III.** — *Étant donnée l'équation d'un système de deux droites parallèles rapportées à des axes faisant entre eux un angle* $\theta$, *trouver les coefficients de l'équation*

$$S_1X^2+F_1=0,$$

*qui représente ces deux droites rapportées à la ligne des centres et à une perpendiculaire sur cette ligne.*

Soit $f=0$ l'équation des deux droites rapportées à des axes

quelconques $ox$, $oy$; la relation

$$\frac{A+C-2B\cos\theta}{\sin^2\theta}=S_1$$

fera connaître $S_1$; quant aux relations

$$\frac{\delta}{\sin^2\theta}=\frac{\delta_1}{\sin^2\theta_1},\quad \frac{\Delta}{\sin^2\theta}=\frac{\Delta_1}{\sin^2\theta_1},$$

elles prennent la forme $0=0$, et ne pourront pas servir à calculer $F_1$.

Pour déterminer cette constante, remarquons que, quand on passe des anciens axes $ox$, $oy$ aux nouveaux CX, CY, la fonction $f$ devient $S_1X^2+F_1$; par suite, la fonction $f-F_1$ est un carré parfait, et tous les mineurs du premier degré de son discriminant

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F-F_1 \end{vmatrix}$$

sont nuls. Égalons par exemple à zéro le mineur relatif à l'élément A, nous aurons l'équation

$$\begin{vmatrix} C & E \\ E & F-F_1 \end{vmatrix}=0;$$

d'où l'on déduit

$$CF_1=\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix}=\Delta'_A,$$

$\Delta'_A$ représentant la dérivée prise par rapport à A du discriminant $\Delta$ de la fonction $f$.

**Remarque.** — En égalant à zéro les mineurs du discriminant de la fonction $f-F_1$ relatifs aux éléments A, C, B, on trouve les équations

$$CF_1=\Delta'_A\quad AF_1=\Delta'_C\quad 2BF_1=-\Delta'_B;$$

on en tire

$$\frac{A+C-2B\cos\theta}{\sin^2\theta}F_1=\frac{\Delta'_A+\Delta'_C+\Delta'_B\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Appelons $4d^2$ le carré de la distance des deux droites, c'est-à-

dire posons $d^2 = -\frac{F_1}{S_1}$; le premier membre de la dernière équation pourra être remplacé par $-d^2S_1^2$; il conserve la même valeur quand on change les axes $ox, oy$ d'une manière quelconque; on a donc le théorème suivant :

**135. Théorème IV.** — *Soit $f=0$ l'équation d'un système de deux droites parallèles rapportées à des axes faisant entre eux un angle $\theta$; l'expression*

$$\frac{\Delta'_A + \Delta'_C + \Delta'_B \cos\theta}{\sin^2\theta}$$

*conserve la même valeur quand on change les axes de coordonnées.*

**Exemple.** — *Ramener à la forme*

$$S_1X^2 + F_1 = 0$$

*l'équation*

$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 4y - 1 = 0,$$

*l'angle des axes étant* $\theta = \frac{\pi}{3}$.

On a

$$S_1 = \frac{A + C - 2B\cos\theta}{\sin^2\theta} = 4 \qquad F_1 = \frac{\Delta'_A}{C} = \frac{1}{C}\begin{vmatrix} C & E \\ E & F \end{vmatrix} = -2.$$

Les deux droites rapportées à la ligne des centres et à une perpendiculaire sur cette ligne ont donc pour équation

$$2X^2 - 1 = 0.$$

### Longueurs des axes d'une ellipse ou d'une hyperbole.

**136.** L'équation de l'ellipse ou de l'hyperbole rapportée aux axes de symétrie est

$$S_1X^2 + S_2Y^2 + F_1 = 0;$$

la courbe rencontre ses axes en des points qui ont pour coordonnées

$$\left(X = \pm\sqrt{-\frac{F_1}{S_1}}, Y = 0\right) \quad \text{et} \quad \left(X = 0, Y = \pm\sqrt{-\frac{F_1}{S_2}}\right);$$

nous allons distinguer deux cas :

1° *La courbe est du genre ellipse.* — Les coefficients $S_1, S_2$ sont alors de même signe; on peut les supposer positifs.

Lorsque la constante $F_1$ est nulle, l'équation n'étant satisfaite que pour $X=0, Y=0$ représente un point.

Lorsque la constante $F_1$ est positive, l'équation n'admet aucune solution réelle; on dit qu'elle représente une ellipse imaginaire.

Enfin, lorsque la constante $F_1$ est négative, la courbe est une ellipse rencontrant chacun des axes de symétrie en deux points réels. Si nous posons

$$a^2 = -\frac{F_1}{S_1} \qquad b^2 = -\frac{F_1}{S_2},$$

l'équation devient

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et les quantités $2a$, $2b$ représentent les longueurs des axes.

2° *La courbe est du genre hyperbole.* — Les coefficients $S_1$, $S_2$ sont alors de signes contraires; on peut supposer $S_1 > 0$, $S_2 < 0$.

Lorsque la constante $F_1$ est nulle, l'équation représente deux droites qui se coupent.

Lorsque la constante $F_1$ n'est pas nulle, l'équation représente une hyperbole; pour fixer les idées, nous supposerons $F_1$ négatif: l'axe CX rencontre alors l'hyperbole en deux points réels, on l'appelle axe *transverse;* l'axe CY la rencontre en deux points imaginaires, on l'appelle axe *imaginaire*. Si nous posons

$$a^2 = -\frac{F_1}{S_1} \qquad b^2 = \frac{F_1}{S_2},$$

l'équation devient

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

la quantité $2a$ est la longueur de l'axe réel; on dit que la quantité $2b$ est la longueur de l'axe imaginaire.

**Problème IV.** — *Étant donnée l'équation d'une ellipse ou d'une hyperbole rapportée à des axes faisant entre eux un angle $\theta$, trouver les longueurs des axes de symétrie.*

Nous désignerons par $a^2$ et $b^2$ les valeurs algébriques des

carrés des demi-axes, ces quantités étant positives quand l'axe est réel, négatives quand l'axe est imaginaire ; l'équation de la courbe, ellipse ou hyperbole, rapportée aux axes de symétrie, sera

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1=0.$$

Soit $f=0$ l'équation de la courbe rapportée à deux axes quelconques $ox$, $oy$ ; quand on passe de ces axes aux axes de symétrie, la fonction $f$ devient $\lambda\left(\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-1\right)$, où $\lambda$ est une constante.

En appliquant le théorème III, on a les relations

$$\frac{\delta}{\sin^2\theta}=-\frac{\lambda^2}{a^2b^2}\qquad \frac{A+C-2B\cos\theta}{\sin^2\theta}=\lambda\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)$$

$$\frac{\Delta}{\sin^2\theta}=-\frac{\lambda^3}{a^2b^2}=\lambda\frac{\delta}{\sin^2\theta};$$

On déduit de là

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{\delta}{\Delta}\cdot\frac{A+C-2B\cos\theta}{\sin^2\theta}\qquad \frac{1}{a^2b^2}=-\frac{\delta^3}{\Delta^2\sin^2\theta};$$

donc les carrés des demi-axes sont les racines de l'équation

$$\frac{1}{\rho^2}-\frac{\delta}{\Delta}\cdot\frac{A+C-2B\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{1}{\rho}-\frac{\delta^3}{\Delta^2\sin^2\theta}=0,$$

ou de l'équation

$$\rho^2+\frac{\Delta}{\delta^2}(A+C-2B\cos\theta)\rho-\frac{\Delta^2}{\delta^3}\sin^2\theta=0.$$

### Paramètre de la parabole.

**137**. L'équation $S_2Y^2+2D_1X=0$, qui représente la parabole rapportée à son axe et à la tangente au sommet peut être mise sous la forme suivante :

$$Y^2\pm 2pX=0,$$

en posant $p=\pm\frac{D_1}{S_2}$ ; la constante $p$ est appelée le *paramètre* de la parabole.

**Problème V.** — *Étant donnée l'équation d'une parabole rapportée à des axes faisant entre eux un angle $\theta$, trouver le paramètre de la courbe.*

Soit $f=0$ l'équation de la parabole rapportée à des axes quelconques, quand on la rapporte à l'axe de symétrie et à la tangente au sommet, la fonction $f$ devient

$$\lambda(Y^2 \pm 2pX),$$

où $\lambda$ est une constante.

En appliquant le théorème III, on a les relations

$$\frac{A+C-2B\cos\theta}{\sin^2\theta}=\lambda \qquad \frac{\Delta}{\sin^2\theta}=-\lambda^3p^2;$$

d'où l'on déduit l'équation

$$p=\frac{(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\sin^2\theta}{(A+C-2B\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

qui fait connaître le paramètre $p$.

## Équation de l'ellipse et de l'hyperbole rapportées à deux diamètres conjugués.

**138.** Lorsqu'on rapporte une ellipse ou une hyperbole à deux diamètres conjugués, comme à chaque valeur de $x$ correspondent deux valeurs de $y$ égales et de signes contraires et inversement, l'équation de la courbe prend la forme

$$Ax^2+Cy^2+F=0.$$

En raisonnant comme au paragraphe (136), on verra que, dans le cas de l'ellipse, on peut mettre l'équation précédente sous la forme

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-1=0,$$

et, dans le cas de l'hyperbole, sous la forme

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}-1=0,$$

en représentant par $2a'$, $2b'$ les longueurs des diamètres conju-

gués pris pour axes de coordonnées : dans le cas de l'hyberbole, l'un des diamètres conjugués est imaginaire.

## Théorèmes d'Apollonius.

**139.** Pour fixer les idées, supposons que la courbe soit une ellipse; rapportée aux axes de symétrie $ox$, $oy$, elle a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

rapportée à deux diamètres conjugués $ox'$, $oy'$, faisant entre eux l'angle $\theta$, elle a pour équation

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-1=0.$$

Quand on passe des axes $ox$, $oy$ aux axes $ox'$, $oy'$, le terme constant $-1$ ne change pas, donc la fonction $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ devient $\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-1$. En appliquant le théorème III, on a les relations

$$\frac{\frac{1}{a'^2}+\frac{1}{b'^2}}{\sin^2\theta}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \qquad \frac{1}{a'^2b'^2\sin^2\theta}=\frac{1}{a^2b^2};$$

on en déduit

$$a'^2+b'^2=a^2+b^2 \qquad a'b'\sin\theta=ab,$$

qui donnent les deux théorèmes suivants connus sous le nom de *théorèmes d'Apollonius*.

**Théorème I.** — *La somme des carrés de deux diamètres conjugués quelconques d'une ellipse est constante et égale à la somme des carrés des axes.*

**Théorème II.** — *L'aire du parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est constante et égale à celle du rectangle construit sur les axes.*

Dans le cas où la courbe est une hyperbole, le premier théorème doit être énoncé de la manière suivante:

**Théorème.** — *La différence des carrés de deux diamètres conjugués quelconques est constante et égale à la différence des carrés des axes.*

**140.** Comme dernière application du théorème III, nous établirons la proposition suivante:

**Théorème.** — *Dans toute courbe du second ordre à centre, la somme des carrés des inverses de deux diamètres rectangulaires est constante.*

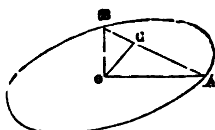


Fig. 102.

L'équation de la courbe rapportée à deux diamètres rectangulaires quelconques est

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + F = 0,$$

et l'on a

$$\frac{1}{\overline{OA}^2} = -\frac{A}{F} \quad \frac{1}{\overline{OB}^2} = -\frac{C}{F},$$

d'où

$$\frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} = -\frac{1}{F}(A + C);$$

quand on fait tourner les axes autour du centre O, les quantités F et A + C ne changent pas de valeur; donc la somme $\frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2}$ reste constante.

**Remarque.**—Menons la hauteur OC du triangle rectangle AOB; on sait que l'on a

$$\frac{1}{\overline{OC}^2} = \frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2}.$$

Cette relation montre que la hauteur OC reste constante quand l'angle droit BOA pivote autour de son sommet O; de là résulte le théorème suivant:

**Théorème.** — *Dans une courbe du second degré à centre, les cordes vues de ce point sous un angle droit sont tangentes à une circonférence concentrique à la courbe.*

## EXERCICES.

1. Construire les courbes qui ont pour équations

$$
\begin{array}{ll}
2x^2 + y^2 - 2xy + 3x - 2y - 1 = 0 & x^2 - xy + 3x - 2y + 4 = 0 \\
2x^2 + y^2 - 2xy - 2y + 2 = 0 & x^2 - xy + 3x - 2y + 2 = 0 \\
2x^2 + y^2 - 2xy + 3x - 2y + 2 = 0 & 4x^2 + y^2 - 4xy - 3x + 2y + 2 = 0 \\
x^2 - y^2 - 2xy + 4x + 2y - 5 = 0 & 4x^2 + y^2 - 4xy - 4x + 2y - 2 = 0 \\
x^2 - y^2 - 2xy + 4x + 2y - 1 = 0 & 4x^2 + y^2 - 4xy - 4x + 2y + 1 = 0 \\
x^2 - y^2 - 2xy + 10x + 2y + 7 = 0. &
\end{array}
$$

2. Le point P $(\alpha, \beta)$ se déplaçant dans le plan, déterminer la nature des courbes qui ont respectivement pour équations

$$y = x \pm \sqrt{(\beta^2 - \alpha)x^2 - 2(\alpha - \beta)x - 1}$$

$$y = x + 1 \pm \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 + 1)x^2 + 2(\alpha + \beta)x - 1}$$

$$y = \frac{x}{\alpha - 1} \pm \frac{1}{\alpha - 1}\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)x^2 - 2(\alpha - \beta)x + \alpha - \beta}$$

$$y = \frac{x}{\alpha + 1} \pm \frac{1}{\alpha + 1}\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 - 1)x^2 + 2(\alpha + \beta - 1)x + (\alpha + \beta - 1)}$$

$$(\alpha^2 - a^2)x^2 + (\beta^2 - a^2)y^2 - 2\alpha\beta xy + 2a^2\alpha x + 2b^2\beta y - a^4 = 0.$$

3. On donne un cercle, deux points A, A′ sur sa circonférence et un point P situé dans son plan.

Par le point P on mène une sécante coupant la circonférence du cercle aux points B et B′; on joint AB, A′B′; trouver le lieu des points de rencontre des lignes de jonction.

Discuter ce lieu, le point P se déplaçant dans le plan.

4. On donne un point A, une droite D et un cercle: une droite qui tourne autour du point A rencontre la droite D en des points variables B; trouver le lieu des points où la droite AB est coupée par la polaire du point B.

Discuter ce lieu, le point A se déplaçant dans le plan.

5. Trouver les grandeurs des axes des ellipses représentées par les équations

$$(ax + by)^2 + (a'x + b'y)^2 = c^2 \qquad (ax + a'y)^2 + (bx + b'y)^2 = c^2.$$

Examiner le cas où ces courbes sont rapportées à des axes de coordonnées rectangulaires.

6. Trouver la condition nécessaire et suffisante pour que les diamètres de Newton soient parallèles à une même droite, quelle que soit la direction des cordes conjuguées.

7. Étant donnée une courbe du second degré, trouver les diamètres conjugués faisant entre eux un angle donné. — Cas où cet angle est droit.

8. Conditions nécessaires et suffisantes pour que les axes d'une courbe du second degré aient la même longueur.

9. Trouver les longueurs des axes d'une ellipse ou d'une hyperbole en cherchant les rayons des cercles qui touchent ces courbes et leur sont concentriques.

---

# LIVRE IV

## THÉORIE GÉNÉRALE DES COURBES

---

## CHAPITRE PREMIER

### TANGENTES.

**141. Définition.** — *On appelle tangente en un point* A *d'une courbe la limite des positions que prend une sécante qui tourne autour du point* A, *jusqu'à ce qu'un second point d'intersection vienne se confondre avec* A.

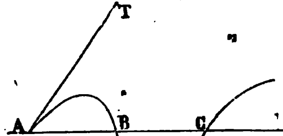



Fig. 102.

Soient $x$ et $y$ les coordonnées du point de contact A, $x+\Delta x$, et $y+\Delta y$ celles d'un point B de la courbe tel qu'on peut aller de A en B sans quitter la courbe ; le coefficient angulaire de la sécante AB a pour expression $\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot$ Quand le point B se rapproche indéfiniment du point A, les quantités $\Delta y$ et $\Delta x$ tendent simultanément vers zéro, et leur rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a pour limite la dérivée de l'ordonnée considérée comme fonction de l'abscisse ; de là résulte le théorème suivant :

**Théorème.** — *Le coefficient angulaire de la tangente en un point* A $(x, y)$ *d'une courbe est égal à la dérivée de l'ordonnée $y$ considérée comme fonction de l'abscisse.*

**Équation de la tangente.** — Si l'équation de la courbe est résolue par rapport à $y$, c'est-à-dire de la forme $y=f(x)$, la tangente a pour équation

$$Y-y=(X-x)f'(x).$$

Si l'équation de la courbe n'est pas résolue par rapport à $y$,

c'est-à-dire de la forme $f(x,y)=0$, le coefficient angulaire de la tangente est donné par la relation

$$f'_x + y' f'_y = 0,$$

et cette droite a pour équation

$$(1) \qquad (X-x)f'_x + (Y-y)f'_y = 0.$$

L'équation précédente peut être écrite comme il suit :

$$(1') \qquad X f'_x + Y f'_y - (x f'_x + y f'_y) = 0\,;$$

nous allons lui donner une forme plus simple.

Rendons homogène la fonction $f$ en y remplaçant $x$ et $y$ par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ ; puis posons

$$z^m f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = \varphi(x,y,z)\,;$$

nous aurons l'identité

$$x\varphi'_x + y\varphi'_y + z\varphi'_z \equiv m\varphi(x,y,z).$$

Pour $z=1$ la fonction $\varphi(x,y,z)$ devient $f(x,y)$ et s'annule, puisque le point de contact $A(x,y)$ est sur la courbe ; les fonctions $\varphi'_x, \varphi'_y$ deviennent respectivement $f'_x, f'_y$ ; quant à la valeur que prend $\varphi'_z$, nous conviendrons de la désigner par $f'_z$. Nous aurons alors la relation

$$x f'_x + y f'_y + f'_z = 0,$$

et l'équation de la tangente prendra la forme suivante :

$$(2) \qquad X f'_x + Y f'_y + Z f'_z = 0\,;$$

on devra toujours poser $Z = z = 1$.

*Exemple.* — Considérons la courbe qui a pour équation

$$y - x\cos x = 0.$$

Cette équation rendue homogène devient

$$f = y - x\cos\frac{x}{z} = 0\,;$$

on en tire

$$f'_x = -\cos\frac{x}{z} + \frac{x}{z}\sin\frac{x}{z} \quad f'_y = 1 \quad f'_z = -\frac{x^2}{z^2}\sin\frac{x}{z},$$

et la tangente à la courbe considérée aura pour équation

$$X(x\sin x - \cos x) + Y - x^2\sin x = 0.$$

**Remarque.** — Il arrive souvent que les coordonnées des points d'une courbe sont définies par deux équations

$$x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t),$$

où $t$ est une variable indépendante; il est encore facile de trouver l'expression du coefficient angulaire I de la tangente.

Appelons $\Delta t$ l'accroissement de la variable $t$ auquel correspondent des accroissements $\Delta x$ et $\Delta y$ pour $x$ et pour $y$, on aura

$$I = \lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}};$$

donc

$$I = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

### Tangente à l'origine.

**142. Théorème.** — *Quand une courbe passe par l'origine, le coefficient angulaire de la tangente en ce point est égal à la limite du rapport $\frac{y}{x}$ pour $x = 0$.*

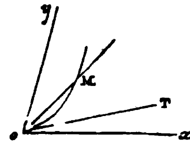


Fig. 103.

Soit en effet $M(x,y)$ un point de l'arc de la courbe qui passe par l'origine, le coefficient angulaire de la sécante OM sera $\frac{y}{x}$; or, quand le point M tend vers l'origine $o$, c'est-à-dire quand $x$ tend vers zéro, la sécante OM a pour limite la tangente OT; donc le coefficient angulaire de cette tangente est bien égal à la limite du rapport $\frac{y}{x}$ pour $x = 0$.

Considérons, par exemple, la courbe qui a pour équation

$$y = \operatorname{tg} x;$$

l'abscisse $x$ tendant vers zéro, on a

$$\lim \frac{y}{x} = \lim \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1;$$

donc, à l'origine, la courbe touche la première bissectrice.

Quand l'équation de la courbe est algébrique et mise sous forme entière, on peut établir le théorème suivant :

**Théorème.** — *Si l'équation d'une courbe est algébrique et de forme entière, on obtient le faisceau des tangentes à l'origine en égalant à zéro l'ensemble des termes de moindre degré.*

En groupant ensemble les termes de même degré, l'équation de la courbe prendra la forme

$$\varphi_m(x,y) + \varphi_{m-1}(x,y) + \ldots + \varphi_1(x,y) = 0;$$

elle ne contient pas de terme constant, puisque la courbe passe par l'origine.

Définissons les coordonnées d'un point quelconque $M(x,y)$ d'une droite passant par l'origine par les relations

(3) $$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \rho;$$

les valeurs de $\rho$ qui correspondent aux points où cette droite rencontre la courbe seront les racines de l'équation

(4) $$\rho^m \varphi(\alpha, \beta) + \rho^{m-1} \varphi_{m-1}(\alpha, \beta) + \ldots + \rho \varphi_1(\alpha, \beta) = 0.$$

Nous allons distinguer plusieurs cas.

1° *Dans l'équation de la courbe, les termes de moindre degré sont du premier degré.* — L'équation (4) admet, quels que soient $\alpha$ et $\beta$, la racine $\rho = 0$, et toute droite passant par l'origine rencontre la courbe en des points dont un seul en général coïncide avec l'origine ; on dit que l'origine est un point *simple*. Pour que la droite touche la courbe à l'origine, il faut et il suffit que l'équation (4) admette la racine zéro au moins avec le degré *deux* de multiplicité, ou que l'on ait

(5) $$\varphi_1(\alpha, \beta) = 0.$$

On aura l'équation de la tangente en éliminant $\alpha$ et $\beta$ entre les équations (3) et (5), ce qui donne l'équation

$$\varphi_1(x, y) = 0.$$

2° *Dans l'équation de la courbe, les termes de moindre degré sont du degré p.* — L'équation admet, quels que soient $\alpha$ et $\beta$, la racine $\rho = 0$ avec le degré $p$ de multiplicité, et toute droite passant par l'origine rencontre la courbe en des points parmi lesquels $p$ sont confondus avec l'origine : de l'origine partent $p$ arcs de la courbe, et l'on dit que l'origine est un point *multiple d'ordre p.* Pour que la droite touche l'un des arcs passant par l'origine, il faut et il suffit que l'équation (4) admette la racine zéro au moins avec le degré $p+1$ de multiplicité, ou que l'on ait

$$\varphi_p(\alpha, \beta) = 0.$$

En éliminant $\alpha$ et $\beta$ entre cette relation et l'équation (3), on obtient l'équation

$$\varphi_p(x, y) = 0,$$

qui représente $p$ droites passant par l'origine et touchant respectivement les arcs qui partent de ce point.

Considérons, par exemple, le Folium de Descartes, qui a pour équation

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0;$$

cette courbe passe par l'origine qui est un point double ; les tangentes à l'origine sont les axes de coordonnées.

**143. Problème.** — *Par un point donné* $P(x_0, y_0)$, *mener une tangente à une courbe* C.

Prenons pour inconnues les coordonnées $x$, $y$ du point du contact ; si $f = 0$ est l'équation de la courbe, celle de la tangente sera

$$(X - x) f'_x + (Y - y) f'_y = 0;$$

en exprimant que cette droite passe par le point P, on aura la relation

$$(x_0 - x) f'_x + (y_0 - y) f'_y = 0, \tag{6}$$

qui, jointe à l'équation de la courbe, détermine les inconnues $x$ et $y$.

Dans l'équation (6), regardons $x$ et $y$ comme des coordonnées courantes ; cette équation représentera une courbe C′ dont les points d'intersection avec la courbe donnée C seront les points de contact des tangentes issues du point P.

**Remarque.** — La courbe C′ jouit d'une propriété qui mérite d'être signalée ; l'équation (6) ne change pas quand on remplace l'équation $f=0$ par l'équation $f-k=0$, où $k$ représente une constante ; de là résulte le théorème suivant :

**Théorème.** — *Le lieu géométrique des points de contact des tangentes menées d'un point* P *aux courbes obtenues en faisant varier* $k$ *dans l'équation* $f-k=0$ *est une courbe* C′ *qui a pour équation*

$$(x_0-x)f'_x+(y_0-y)f'_y=0.$$

*Application.* — Considérons en particulier un faisceau de circonférences concentriques C ; l'équation de ces courbes rapportées à deux diamètres rectangulaires sera

$$x^2+y^2-R^2=0$$

et la courbe C′ aura pour équation

$$(x_0-x)x+(y_0-y)y=0 ;$$

la courbe C′ est donc une circonférence ayant pour diamètre la droite P$o$ qui joint le point donné P au centre commun des circonférences C ; on retrouve ainsi un théorème connu de géométrie élémentaire.

*Cas où la courbe* C *est algébrique.* — Supposons que la courbe C soit algébrique et que son équation $f=0$ mise sous forme entière soit du degré $m$ ; prenons l'équation de la tangente sous la forme

$$Xf'_x+Yf'_y+Zf'_z=0 ;$$

et exprimant que cette droite passe par le point $P(x_0, y_0)$, on aura la relation

$$(6') \qquad x_0f'_x+y_0f'_y+z_0f'_z=0,$$

où l'on doit poser $z=z_0=1$.

L'équation (6′), après cette substitution, représente, quand on

y regarde $x$ et $y$ comme des coordonnées courantes, une courbe d'ordre $m-1$ coupant la courbe donnée au plus en $m(m-1)$ points; donc, d'un point donné P, on peut mener généralement $m(m-1)$ tangentes à une courbe d'ordre $m$.

**Définition.** — ***La classe d'une courbe est représentée par le nombre de ses tangentes qui passent par un point quelconque du plan.***

On voit donc qu'une courbe d'ordre $m$ est en général de la classe $m(m-1)$. En particulier, les courbes du second ordre sont de la seconde classe.

**144. Problème.** — ***Mener à une courbe une tangente parallèle à une droite donnée.***

Soit $a$ le coefficient angulaire de la droite donnée ; les coordonnées du point de contact d'une tangente parallèle à cette droite devront satisfaire aux équations

$$f=0 \quad f'_x+af'_y=0.$$

Si l'équation $f=0$ de la courbe donnée est algébrique et du degré $m$, la seconde des équations précédentes sera du degré $m-1$ ; donc, *une courbe du degré m admet en général* $m(m-1)$ *tangentes parallèles à une droite donnée.*

## Courbes tangentes. — Courbes orthogonales.

**145. Courbes tangentes.** — Soient $f=0$, $\varphi=0$ les équations des deux courbes; on exprimera qu'elles se touchent en un point $M(x,y)$ en écrivant que les coefficients angulaires de leurs tangentes au point M sont égaux ; les coordonnées $x$ et $y$ doivent donc satisfaire aux trois équations

$$f(x,y)=0 \quad \varphi(x,y)=0 \quad \frac{f'_x}{f'_y}=\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

En éliminant $x$ et $y$ entre ces équations on obtiendra une relation de condition.

**Courbes orthogonales.** — On exprimera que deux courbes sont orthogonales en écrivant que les tangentes en leur point de rencontre $M(x, y)$ sont perpendiculaires.

Si les axes sont rectangulaires, les coordonnées $x, y$ devront satisfaire aux trois équations

$$f(x,y)=0 \quad \varphi(x,y)=0 \quad \frac{f'_x}{f'_y}=-\frac{\varphi'_y}{\varphi'_x}.$$

En éliminant $x$ et $y$ entre ces équations, on obtiendra une relation de condition.

Appliquons ce qui précède aux circonférences ayant pour équations

(7) $$x^2+y^2-R^2=0 \quad (x-d)^2+y^2-R'^2=0.$$

On doit à ces équations associer la relation

$$\frac{x}{y}=-\frac{y}{x-d},$$

qui, en tenant compte de la première des équations (7), devient

(8) $$dx=R^2.$$

Des équations (7) on tire par soustraction

$$d^2-2dx+R^2-R'^2=0;$$

remplaçons dans cette dernière équation $dx$ par $R^2$, nous obtiendrons la relation

$$d^2=R^2+R'^2,$$

qui exprime que le carré de la distance des centres doit être égal à la somme des carrés des rayons.

## Normales.

**Définition.** — *On appelle normale la perpendiculaire à une tangente menée par le point de contact.*

Le point où la normale rencontre la courbe à angle droit est le *pied* de cette droite, ou encore son *point d'incidence.*

L'équation de la normale ayant pour point d'incidence un point $M(x, y)$ est

$$\frac{X-x}{f'_x-f'_y\cos\theta}=\frac{Y-y}{f'_y-f'_x\cos\theta}$$

si les coordonnées sont obliques, et

$$\frac{X-x}{f_x} = \frac{Y-y}{f_y}$$

si les coordonnées sont rectangulaires.

### Tangentes aux courbes du second ordre.

**146.** Soit $f=0$ l'équation rendue homogène d'une courbe du second ordre, la tangente au point $A(x,y)$ aura pour équation

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0,$$

où l'on doit toujours poser $Z = z = 1$.

Il n'est pas sans utilité de remarquer que, dans le cas des courbes du second ordre, on peut écrire comme il suit l'équation de la tangente :

$$xf'_X + yf'_Y + zf'_Z = 0.$$

**Corde de contact.** — En exprimant que la tangente passe par un point donné $P(x_0, y_0)$, on obtient la relation

$$xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0} = 0, \tag{9}$$

qui représente une droite lorsqu'on y pose $z = z_0 = 1$ et qu'on y regarde $x$ et $y$ comme des coordonnées courantes. Les points où cette droite rencontre la courbe donnée sont les points de contact des tangentes issues du point P ; comme il y a deux points de rencontre A et B, il y aura deux tangentes, et la corde de contact, AB sera représentée par l'équation (9).

**Problème.** — *Étant donnée l'équation d'une droite*

$$aX + bY + c = 0,$$

*exprimer que cette droite est tangente à une courbe donnée du second ordre.*

Soit $f=0$ l'équation rendue homogène de la courbe du second ordre, une tangente quelconque sera représentée par l'équation

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0;$$

il faut identifier cette équation avec l'équation de la droite, rendue homogène, c'est-à-dire avec l'équation

$$aX + bY + cZ = 0;$$

ce qui donne les équations de condition

$$(10) \qquad \frac{f'_x}{a} = \frac{f'_y}{b} = \frac{f'_z}{c}.$$

Comme le point de contact est sur la courbe, la fonction $f(x,y,z)$ est nulle pour $z=1$, ou, ce qui est la même chose. on a

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = 0,$$

équation qui devient

$$(11) \qquad ax + by + cz = 0,$$

en tenant compte des relations (10).

Pour exprimer que la droite donnée est tangente, il reste à éliminer $x, y, z$ entre les équations (10) et (11).

Représentons, pour plus de symétrie, par $-2\lambda$ la valeur commune des trois rapports égaux $\frac{f'_x}{a}, \frac{f'_y}{b}, \frac{f'_z}{c}$; nous devrons éliminer $x, y, z, \lambda$ entre les quatre équations linéaires et homogènes

$$\begin{aligned} Ax + By + Dz + a\lambda &= 0 \\ Bx + Cy + Ez + b\lambda &= 0 \\ Dx + Ey + Fz + c\lambda &= 0 \\ ax + by + cz \qquad &= 0 \end{aligned}$$

ce qui donne la relation de condition

$$\begin{vmatrix} A & B & D & a \\ B & C & E & b \\ D & E & F & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**Remarque.** — Désignons par U le déterminant qui forme le premier membre de l'équation précédente ; ce déterminant U est un *invariant*, car il est le discriminant de la fonction à quatre variables

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + 2Dxz + 2Eyz + Fz^2 + 2t(ax + by + cz).$$

**147. Problème.** — *Étant donnée l'équation d'une droite*

$$aX + bY + c = 0,$$

*reconnaître si cette droite coupe une courbe de second ordre en des points réels ou imaginaires.*

Les deux points de rencontre étant confondus quand la fonction U est nulle, on prévoit que, les deux points ne coïncidant pas, leur nature dépendra du signe de la fonction U; comme cette fonction est un invariant, elle conservera son signe si l'on prend la droite donnée pour axe des $y$, c'est-à-dire si l'on suppose $b = c = 0$; on a alors

$$U = a^2(E^2 - CF).$$

D'un autre côté, les ordonnées des points où l'axe des $y$ rencontre la courbe sont les racines de l'équation

$$Cy^2 + 2Ey + F = 0;$$

elles sont réelles ou imaginaires, suivant que le binôme $E^2 - CF$ est positif ou négatif; donc

*les points de rencontre de la droite et de la courbe*

$$\textit{seront} \begin{cases} \textit{réels} \\ \textit{imaginaires} \end{cases} \textit{si l'on a} \begin{cases} U > 0 \\ U < 0 \end{cases}.$$

**148. Définition.** — *On dit qu'un point est extérieur à une courbe du second ordre quand les deux tangentes issues de ce point sont réelles; il lui est intérieur quand ces tangentes sont imaginaires.*

Soient $x, y$ les coordonnées d'un point M du plan, il sera extérieur ou intérieur à la courbe suivant qu'elle sera rencontrée en deux points réels ou imaginaires par la corde de contact des tangentes issues du point M.

L'équation de cette corde de contact étant

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = 0,$$

on doit, dans le déterminant U, poser $a = f'_x, b = f'_y, c = f'_z$, ce qui donne

$$U = \begin{vmatrix} A & B & D & f'_x \\ B & C & E & f'_y \\ D & E & F & f'_z \\ f'_x & f'_y & f'_z & 0 \end{vmatrix}.$$

Ajoutons à la quatrième colonne de ce déterminant les trois premières colonnes multipliées respectivement par

$$-2x, -2y, -2z,$$

il vient

$$U = -\begin{vmatrix} A & B & D & 0 \\ B & C & E & 0 \\ D & E & F & 0 \\ f'_x & f'_y & f'_z & 4f \end{vmatrix} = -4\Delta f(x, y, z).$$

Pour $z=1$, $f(x, y, z)$ représente la valeur que prend le premier membre de l'équation de la courbe quand on y remplace les coordonnées courantes par celles du point M. On voit que

$$\textit{le point M sera} \begin{cases} \textit{extérieur} \\ \textit{intérieur} \end{cases} \textit{si l'on a} \begin{cases} \Delta f < 0 \\ \Delta f > 0 \end{cases}.$$

### Équation quadratique des tangentes menées d'un point à une courbe du second ordre.

En raisonnant comme au paragraphe 79, on trouve, pour représenter les deux tangentes menées par un point $P(x_0, y_0)$, l'équation

$$4f(x, y, z)\, f(x_0, y_0, z_0) = (xf'_{x_0} + yf'_{y_0} + zf'_{z_0})^2.$$

### Construction géométrique des tangentes à certaines courbes.

**149.** On peut construire géométriquement les tangentes aux courbes engendrées par les différents points d'une figure de forme invariable qui se déplace dans son plan.

**Lemme.** — *Une figure de forme invariable mobile dans son plan peut être amenée d'une quelconque de ses positions à une autre par une rotation autour d'un point du plan.*

Soient A et B deux points quelconques de la figure dans sa première position F, et A′, B′ ces mêmes points dans la seconde position F′ de la figure; si l'on fait coïncider les points A et B avec les points A′ et B′, la figure F coïncidera avec la figure F′. Appelons I le point de rencontre des perpendiculaires élevées aux droites AA′, BB′ en leur milieu, les triangles AIB, A′IB′ seront égaux comme ayant

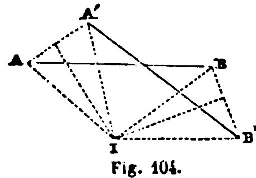


Fig. 104.

les trois côtés égaux chacun à chacun; de là résulte l'égalité des angles AIB, A'IB', et par suite celle des angles AIA', BIB'. Cela posé, si l'on fait tourner la figure F dans son plan autour du point I d'un angle égal à l'angle AIA', le point A viendra coïncider avec le point A', et le point B avec le point B'; la figure F s'appliquera donc sur la figure F'.

**Remarques.** — 1° La démonstration précédente est en défaut quand la figure AA' BB' est un trapèze dont AA' et BB' sont les côtés parallèles, car alors les perpendiculaires élevées sur ces côtés en leur milieu se confondent. Dans ce cas, le point de rencontre I des deux droites AB, A'B' peut être pris pour centre de rotation; de plus il n'y a pas d'autre centre de rotation, car I est le seul point de la droite $xy$, duquel on voit les segments AA', BB' sous le même angle.

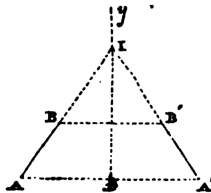


Fig. 105.

2° La démonstration est encore en défaut quand la figure A B A' B est un parallélogramme, car alors les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés AA', BB' sont parallèles. Dans ce cas, pour faire coïncider les points A, B avec les points A', B', il suffit de donner à la figure F un mouvement de translation rectiligne, chaque point de cette figure décrivant des segments de droites égaux à AA', parallèles à AA' et de même sens.

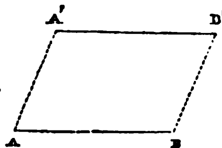


Fig. 106.

Le lemme sera général si nous convenons de regarder le mouvement de translation rectiligne comme un mouvement de rotation s'effectuant autour d'un centre situé à l'infini.

**Théorème.** — *Si l'on considère les trajectoires décrites par les différents points* A, B, C,... *d'une figure plane de forme invariable qui se meut dans son plan, les normales à ces courbes aux points décrivant qui correspondent à une même position de la figure, concourent en un même point.*

Soient A, B, C,... les points de la figure dans une première position F, et A', B', C',... les mêmes points dans une se-

conde position F' : les perpendiculaires élevées sur les droites AA', BB', CC',... en leur milieu concourent en un point I. Si la figure F' se rapproche indéfiniment de la figure F, les cordes AA', BB',... ont pour limites les tangentes aux points A, B, C,... des trajectoires de ces points, et les perpendiculaires à ces cordes deviennent les normales aux mêmes points ; donc ces normales concourent en un certain point O.

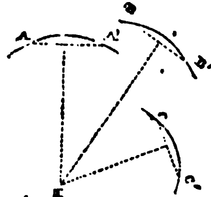


Fig. 107.

Le point O est appelé *centre instantané de rotation.*

**Corollaire.** — Si l'on sait mener les normales aux trajectoires de deux points de la figure mobile, leur intersection déterminera le centre instantané de rotation O ; en joignant le point O à un point quelconque C de la figure, on aura la normale à la trajectoire du point C.

**Définition.** — *On dit qu'une courbe mobile* C' *roule sans glisser sur une courbe fixe* C, *quand la courbe* C' *reste tangente à la courbe* C, *et que, sur les deux courbes, les arcs limités par deux points quelconques qui ont coïncidé ont la même longueur.*

Un pareil mouvement est appelé *épicycloïdal.*

**Théorème.** — *Le déplacement d'une figure plane de forme invariable dans son plan est un mouvement épicycloïdal.*

Quand une figure plane se déplace dans son plan, à chacune de ses positions correspond un centre instantané de rotation. Soit C la courbe décrite sur le plan fixe par ces centres instantanés de rotation ; soit de même C' le lieu sur le plan mobile des points de la figure qui viennent successivement coïncider avec les centres instantanés de rotation ; je dis que, dans le mouvement de la figure, la courbe C' roule sans glisser sur la courbe C.

Soient en effet $F_1, F_2, F_3, \ldots$ les positions occupées par la figure mobile aux époques $0, \theta, 2\theta, \ldots$ ; soient $O_1, O_2, O_3, \ldots$ les centres instantanés de rotation correspondants et $O_1, O'_2, O'_3, \ldots$ les points de la figure qui viendront successivement coïncider avec les points $O_1, O_2, O_3, \ldots$.

Pendant le premier instant, la figure tourne autour du centre $O_1$, et le point $O'_2$ vient en $O_2$; pendant le second instant, la figure tourne autour du point $O_2$, et le point $O'_3$, vient en $O_3$, et ainsi de suite.

Dans cette suite de mouvements, le polygone $O_1 O'_2 O'_3, \ldots$ inscrit dans la courbe C' roule sur le polygone $O_1 O_2 O_3 \ldots$ inscrit dans la courbe C; donc, à la limite, c'est-à-dire quand on fera tendre $\theta$ vers zéro, la courbe C' roulera sans glisser sur la courbe C.

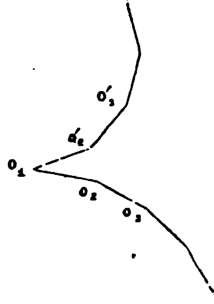


Fig. 108.

## Applications.

**1° Ellipse.** — *Les extrémités d'une droite* AB *de longueur constante glissent sur deux droites rectangulaires* $ox$, $oy$, *un point* M *de cette droite décrit une ellipse.*

Prenons pour axes de coordonnées les directrices $ox$, $oy$; posons $MA = b$, $MB = a$, et construisons le contour des coordonnées du point M; les triangles semblables MAP, MBQ donnent la relation

$$\frac{y}{b} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}; \quad \text{d'où} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1,$$

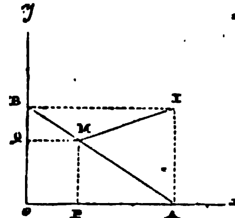


Fig. 109.

équation d'une ellipse dont les axes $2a$ et $2b$ coïncident avec les deux directrices $ox$, $oy$.

**Généralisation.** — *Les extrémités d'une droite* AB *de longueur constante glissent sur deux droites qui se coupent* $o$A, $o$B, *un point quelconque* M *lié à la droite décrit une ellipse.*

Remarquons, d'abord, que la circonférence circonscrite au triangle A$o$B a un rayon constant R, car on a

$$2R = \frac{AB}{\sin A o B}.$$

Considérons cette circonférence comme invariablement liée à la droite AB et entraînée dans le mouvement de cette droite, un point quelconque D de cette circonférence décrira une droite passant par le point $o$; en effet, l'arc DB restant constant, il en est de même de l'angle D$o$B.

Fig. 110.

Cela posé, joignons le point M au centre $\omega$ de la circonférence; les points C et D extrémités du diamètre M$\omega$ décriront deux droites rectangulaires $ox$, $oy$ et comme la longueur CD est constante, le point M décrira une ellipse ayant pour demi-axes MC et MD.

**Remarque.** — La somme des axes est la même pour toutes les ellipses décrites par les points intérieurs à la circonférence; pour des ellipses décrites par des points extérieurs, la différence des axes est la même.

*Normale.* — Dans la position AB de la droite mobile, les normales aux trajectoires des points A et B sont les perpendiculaires AI et BI aux droites $o$A et $o$B; leur point de concours I est le centre instantané de rotation, et la droite IM la normale à l'ellipse décrite par le point M.

Le point I est diamétralement opposé au point $o$; donc la longueur $o$I reste constamment égale au diamètre 2R de la circonférence $\omega$; par suite, sur le plan fixe, le lieu des centres instantanés de rotation est une circonférence décrite du point $o$ comme centre avec 2R pour rayon; d'un autre côté, la circonférence $\omega$ est le lieu des points I sur le plan de la figure mobile; on a donc le théorème suivant:

**Théorème.** — *Tout point invariablement lié à une circonférence qui roule intérieurement, sans glisser, sur une circonférence de rayon double décrit une ellipse; les points de la circonférence mobile décrivent des diamètres de la circonférence fixe.*

**Remarque.** — Il est facile d'établir ce théorème sans recourir à la théorie générale du mouvement d'une figure dans son plan.

Soient $\omega$ et $\omega'$ deux positions de la circonférence mobile et I, I'

les points de contact avec la circonférence fixe; nous avons vu que tout point I de la circonférence mobile entraînée dans le mouvement de la droite AB décrivait un diamètre OI de la circonférence O. Il résulte de là que, la circonférence ω occupant la position ω', le point I viendra au point C intersection de la circonférence ω' et du diamètre OI. Mais l'angle I'ω'C est double de l'angle IOI'; donc les arcs II' et I'C sont égaux en longueur, puisque le rayon de la circonférence O est double du rayon de la circonférence ω; par suite, la circonférence ω roule sans glisser sur la circonférence O.

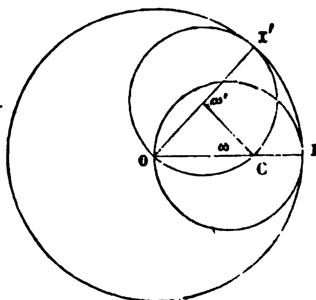


Fig. 111.

**Conchoïde.** — Nous avons déjà défini cette courbe (94); cherchons le centre instantané de rotation. Ce point se trouve d'abord sur la perpendiculaire menée par le point B à la droite D trajectoire du point B. Je dis qu'il est aussi sur la perpendiculaire menée par le point A à la droite AB.

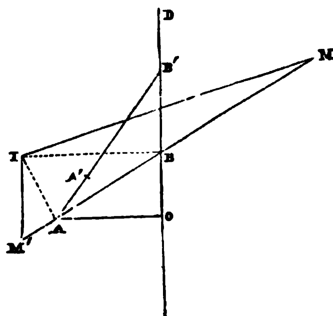


Fig. 112.

En effet, quand la droite mobile occupe la position AB', le point A, considéré comme lié à cette droite, occupe la position A' telle que B'A' = BA et la perpendiculaire élevée sur le segment AA' en son milieu passe, à la limite, par le centre instantané de rotation. Or la limite de cette perpendiculaire est la droite menée par le point A perpendiculairement sur AB; car, quand AB' coïncide avec AB, le rayon vecteur AA' s'annule et la trajectoire du point A de la droite AB touche cette droite au point A.

Le centre instantané I se trouve donc déterminé et les droites IM, IM' sont les normales à la conchoïde aux points M et M'.

**Remarque.** — On peut remplacer la directrice rectiligne D par une courbe quelconque.

**Cissoïde et strophoïde.** — Nous avons fait connaître précédemment (94) le procédé donné par Newton pour tracer la cissoïde d'un mouvement continu. Soit OSB une position de l'équerre mobile; le milieu M du côté SB décrira une cissoïde, et le sommet S de l'équerre décrira une strophoïde, car on a DS = DA.

Fig. 113.

Le centre instantané de rotation se trouve sur la perpendiculaire BI menée par le point B à la droite AB et sur la perpendiculaire OI menée par le point O à la droite OS; les droites IM et IS seront donc normales, l'une à la cissoïde, l'autre à la strophoïde.

**Podaires.** — Nous avons appelé *podaire* le lieu des projections d'un point donné P sur les tangentes d'une courbe C.

La figure de forme invariable qui se déplace est ici l'angle droit PMA. Soient PMA, PM'A' deux positions infiniment voisines de l'angle droit, et *m* le point de rencontre des tangentes MA, M'A'. Après le déplacement de l'angle droit, le point *m* considéré comme lié à l'angle PMA occupera sur la tangente M'A' une position *m'*, telle que M*m* = M'*m'*: la perpendiculaire au segment *mm'* en son milieu passera à la limite par le centre instantané de rotation. Cette perpendiculaire ayant pour limite la normale au point A à la courbe C, le centre instantané de rotation I sera sur cette normale; comme il se trouve aussi sur la perpendiculaire menée par le point P à la droite PM, il est déterminé.

Fig. 114.

**Remarque.** — La droite IM normale à la trajectoire du point M passe par le milieu du rayon vecteur PA.

**Lieu des sommets des angles de grandeur constante circonscrits à une courbe donnée.** — Soit AMB une position de l'angle ; on verra, comme dans le cas des podaires, que le centre instantané de rotation doit se trouver sur les normales à la courbe directrice C aux points où elle est touchée par les deux côtés de l'angle. La droite allant du point de rencontre I de ces normales au sommet M de l'angle sera donc normale à la courbe décrite par le point M.

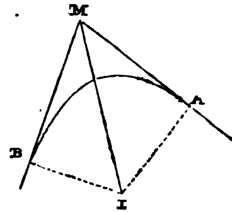


Fig. 115.

# CHAPITRE II

## COURBES ENVELOPPES.

**150.** Soit $f(x,y,a)$ une fonction des coordonnées $x$ et $y$ et d'un paramètre variable $a$; l'équation

$$f(x,y,a)=0,$$

dans laquelle on fera varier $a$, représentera une *famille* de courbes.

Donnons au paramètre variable les valeurs $a$ et $a+h$, les équations

$$f(x,y,a)=0 \qquad f(x,y,a+h)=0$$

représenteront des courbes C et C′ se coupant généralement en des points $m$, $m'$, $m''$,....

Les coordonnées de ces points satisferont aussi à l'équation

$$\frac{f(x,y,a+h)-f(x,y)}{h}=0\,;$$

si l'on fait tendre $h$ vers zéro, les points $m, m', m'', \ldots$ tendront vers des points M, M′, M″,... de la courbe C, points définis par les équations

$$(1) \qquad f(x,y,a)=0 \qquad (2) \qquad f'_a(x,y,a)=0;$$

nous dirons que les points M, M′, M″,... sont les intersections de la courbe C avec la courbe *infiniment voisine* de la même famille.

**Définition.** — *On appelle enveloppe d'une courbe* C *dont l'équation contient un paramètre variable le lieu des points de rencontre de chaque courbe* C *avec la courbe infiniment voisine.*

D'après ce qui précède, on aura l'équation de l'enveloppe en éliminant le paramètre $a$ entre les équations (1) et (2).

La courbe mobile C est appelée *courbe enveloppée.*

**Théorème.** — *Les courbes enveloppées* C *sont tangentes à la courbe enveloppe* E.

Donnons au paramètre $a$ une valeur A, ce qui définit une enveloppée $C_1$; soit $M_1(x_1, y_1)$ un des points de rencontre de la courbe $C_1$ avec la courbe infiniment voisine, le coefficient angulaire I de la tangente au point $M_1$ de la courbe $C_1$ sera donné par la relation

$$f'_{x_1}(x_1, y_1, A) + I f'_{y_1}(x_1, y_1, A) = 0.$$

D'un autre côté, on peut prendre l'équation (1) pour celle de l'enveloppe, pourvu qu'on y regarde $a$ non plus comme une constante mais comme une fonction de $x$ et $y$ définie par l'équation (2) : le coefficient angulaire I' de la tangente en un point quelconque M $(x, y)$ de l'enveloppe sera donc donné par la relation

$$f'_x(x, y, a) + I' f'_y(x, y, a) + (a'_x + I' a'_y) f'_a(x, y, a) = 0,$$

ou par la relation

$$f'_x(x, y, a) + I' f'_y(x, y, a) = 0,$$

car en chaque point de l'enveloppe $f'_a$ est nul.

Faisons coïncider le point M avec le point $M_1$, alors $x$ et $y$ deviendront $x_1$ et $y_1$; de plus, $a$ prendra une valeur numérique justement égale à A; donc on aura $I' = I$, et l'enveloppée $C_1$ touchera l'enveloppe E au point $M_1$.

**Remarque.** — Quand le premier membre de l'équation (1) est une fonction entière du paramètre $a$, l'équation (2) exprime que l'équation

$$f(x, y, a) = 0,$$

où l'on regarde $a$ comme inconnue a une racine multiple. On peut souvent écrire immédiatement l'équation de l'enveloppe en s'appuyant sur cette propriété.

Par exemple, si l'équation des courbes C est

$$\alpha a^2 + 2\beta a + \gamma = 0,$$

$\alpha, \beta, \gamma$ étant des fonctions de $x$ et de $y$, l'équation de la courbe

enveloppe sera

$$\beta^2 - \alpha\gamma = 0.$$

**Généralisation.** — Supposons maintenant que l'enveloppée soit représentée par une équation

$$(3) \qquad f(x, y, a, b) = 0$$

contenant deux paramètres variables liés par la relation

$$(4) \qquad \varphi(a, b) = 0.$$

Pour avoir des points de l'enveloppe, il faut associer à l'équation (3) l'équation

$$(5) \qquad f'_a + b'_a f'_b = 0,$$

obtenue en égalant à zéro la dérivée par rapport à $a$ du premier membre de l'équation (3) où $b$ est considéré comme fonction de $a$. D'un autre côté, de l'équation (4) on tire

$$(6) \qquad \varphi'_a + b'_a \varphi'_b = 0,$$

et les équations (5) et (6) donnent la relation

$$(7) \qquad \frac{f'_a}{\varphi'_a} = \frac{f'_b}{\varphi'_b}.$$

Pour trouver l'équation de l'enveloppe, on éliminera $a$ et $b$ entre les équations (3), (4), (7).

On procéderait d'une manière analogue si l'équation de l'enveloppée contenait $n$ paramètres liés entre eux par $n-1$ relations de condition.

## Application à quelques exemples.

**151. Problème.** — *Trouver l'enveloppe des ellipses décrites par les différents points* M *d'une droite* AB *de longueur constante dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires* $ox$, $oy$ (*fig.* 109).

Prenons les deux directrices $ox$, $oy$ pour axes de coordonnées; posons $AB = l$, $MB = a$, l'équation de l'ellipse décrite par le point M sera

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(l-a)^2} - 1 = 0.$$

Il faut chercher l'enveloppe de la famille des courbes obtenues en faisant varier $a$.

L'équation $f'_a = 0$ est ici

$$\frac{x^2}{a^3} - \frac{y^2}{(l-a)^3} = 0;$$

on en déduit

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{a} = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{(l-a)} = \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{l};$$

d'où

$$\frac{x}{a} = \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{l} x^{\frac{1}{3}} \qquad \frac{y}{l-a} = \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{l} y^{\frac{1}{3}};$$

en substituant ces valeurs dans l'équation de l'ellipse on a l'équation de l'enveloppe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$$

**Problème.** — *Trouver l'enveloppe des droites* AB *de longueur constante dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires $ox$, $oy$* (*fig.* 109).

Prenons encore pour axes les deux directrices $ox$, $oy$, et posons $AB = l$, $OA = a$, $OB = b$ ; l'équation de la droite mobile sera

(8) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$

$a$ et $b$ étant liés par l'équation

(9) $$a^2 + b^2 = l^2.$$

Il faut aux deux équations précédentes joindre la suivante :

(10) $$\frac{x}{a^3} = \frac{y}{b^3},$$

puis éliminer $a$ et $b$ entre les équations (8), (9), (10).

De l'équation (10) on tire

$$\frac{\frac{x}{a}}{a^2} = \frac{\frac{y}{b}}{b^2} = \frac{1}{l^2};$$

d'où

$$a = l^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}} \qquad b = l^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}};$$

en portant ces valeurs dans l'équation (9), on a l'équation de l'enveloppe

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}.$$

On retrouve la même courbe que dans le problème précédent; ce résultat est un cas particulier d'un théorème général qui sera démontré plus loin.

**Problème.** — *Trouver l'enveloppe des circonférences assujetties à passer par un point fixe* O *et à une autre condition quelconque.*

Nous allons démontrer que l'enveloppe coïncide avec le lieu des points symétriques du point O par rapport aux tangentes au lieu des centres des circonférences.

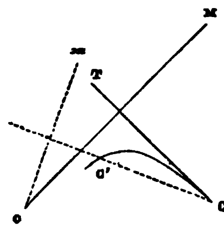


Fig. 116.

Soient, en effet, C et C' les centres de deux des circonférences, elles se couperont en un second point $m$ symétrique du point O par rapport à la corde CC'. A la limite cette corde devient la tangente au point C du lieu des centres, et le point $m$ se confond avec le point M symétrique du point O par rapport à cette tangente.

Nous terminerons par la démonstration des deux théorèmes suivants :

**152. Théorème I.** — *Quand une courbe* C *de forme invariable se déplace dans son plan, le point où elle touche son enveloppe est le pied de la normale menée à la courbe* C *par le centre instantané de rotation.*

Soient en effet C et C' deux positions de la courbe mobile et $m$ un point d'intersection de ces deux courbes. Désignons par $m'$ le point de la courbe C qui est venu en $m$ quand cette courbe occupe la position C'; la perpendiculaire élevée au segment $mm'$ en son milieu passe, à la limite, par le centre instantané de rotation. Or, à la limite, les points $m$ et $m'$ se confondent avec le point M où C touche son enveloppe; par

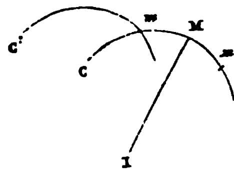


Fig. 117.

suite notre perpendiculaire se confond avec la normale au point M à la courbe C, et cette normale passe par le centre instantané de rotation.

**Théorème II.** — *L'enveloppe des trajectoires des différents points d'une courbe mobile de forme invariable qui se meut dans son plan coïncide avec l'enveloppe de la courbe mobile.*

Soient $a$ un point quelconque de l'enveloppe E de la courbe mobile, et C la position correspondante de cette courbe, laquelle touche E au point $a$ ; le centre instantané de rotation I qui correspond à cette position C de la courbe mobile sera sur la normale au point $a$ de l'enveloppe E. D'un autre côté, la normale à la trajectoire décrite par le point $a$ considéré comme lié à la courbe C doit passer par le point I; donc, cette trajectoire touche au point $a$ la courbe E, et cette courbe est l'enveloppe des trajectoires des différents points de la courbe mobile.

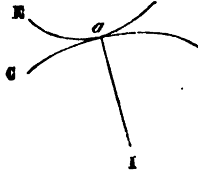


Fig. 118.

Il est facile de démontrer le même théorème par l'analyse.

Soit

$$f(x,y)=0 \tag{11}$$

l'équation de la courbe C rapportée à deux axes rectangulaires $ox$, $oy$ liés invariablement avec elle ; soient, en outre, OX, OY deux axes rectangulaires *fixes* dans le plan. Un point du plan mobile aura, par rapport aux axes $ox$, $oy$, des coordonnées que nous désignerons par $x$ et $y$, et par rapport aux axes OX, OY des coordonnées que nous désignerons par X et Y : en appelant $\alpha$, $\beta$ les coordonnées de l'origine O par rapport aux axes mobiles, on aura les deux équations

$$\alpha + X\cos\omega - Y\sin\omega - x = 0 \tag{12}$$

$$\beta + X\sin\omega + Y\cos\omega - y = 0, \tag{13}$$

$\alpha$, $\beta$, $\omega$ étant des fonctions connues d'une même variable ; nous considérerons $\alpha$ et $\beta$ comme des fonctions de $\omega$.

On aura l'équation de la courbe C rapportée aux axes fixes OX, OY, en remplaçant dans l'équation (11) $x$ et $y$ par leurs valeurs tirées des équations (12) et (13) ; pour obtenir l'enveloppe des courbes C, il faudra joindre à l'équation ainsi formée celle que l'on obtient en égalant à zéro sa dérivée prise par rapport à $\omega$.

En résumé, on devra éliminer $x$, $y$, $\omega$ entre les équations (11), (12), (13) et l'équation

$$(14)\quad (\alpha' - X\sin\omega - Y\cos\omega)f'_x + (\beta' + X\cos\omega - Y\sin\omega)f'_y = 0.$$

Cherchons maintenant l'enveloppe des trajectoires des points de la courbe C.

Dans les équations (12) et (13), donnons à $x$ et à $y$ des valeurs *déterminées* satisfaisant à l'équation (11); ces équations définiront la trajectoire d'un point de la courbe C.

On obtiendrait l'équation $F=0$ de cette trajectoire en tirant la valeur de $\omega$ de l'équation (12) pour la porter dans l'équation (13), et, d'après la théorie des enveloppes, on devrait joindre à l'équation $F=0$ l'équation $F'_x=0$. Nous sommes ainsi conduits à égaler à zéro la dérivée prise par rapport à $x$ du premier membre de l'équation (13), cette dérivée étant prise en regardant $y$ comme lié à $x$ par l'équation (11) et $\omega$ comme lié à $x$ par l'équation (12); on obtient ainsi l'équation

$$(\beta' + X\cos\omega - Y\sin\omega)\omega'_x + \frac{f'_x}{f'_y} = 0.$$

De l'équation (12) on tire

$$(\alpha' - X\sin\omega - Y\cos\omega)\omega'_x - 1 = 0,$$

et si entre les deux équations précédentes on élimine $\omega'_x$, on retrouve encore l'équation (14).

En résumé, pour avoir l'enveloppe des trajectoires des différents points de la courbe C, il faudra éliminer $x, y, \omega$ entre les équations (11), (12), (13), (14); cette enveloppe coïncide donc avec celle de la courbe C.

## EXERCICES.

1° Trouver l'enveloppe des droites telles que le produit de leurs distances à deux points fixes F et F' a une valeur constante.

2° Étant donnés un cercle et un point O, on mène par ce point une sécante variable, et de son pôle P on abaisse sur la sécante une perpendiculaire PM; trouver l'enveloppe des droites PM.

3° Étant données deux droites A, B, trouver l'enveloppe des cordes inscrites entre ces droites et vues d'un point O sous un angle donné.

4° Étant données deux droites D, D', le sommet d'un angle dont les côtés tournent autour de deux points fixes P et P' décrit une troisième droite Δ; trouver l'enveloppe de la droite *dd'* qui joint les points de rencontre des droites D, D' avec les côtés de l'angle.

5° Étant donnés une droite D, un point A et un cercle, on joint le point A aux différents points B de la droite D, et le point B au pôle P de la droite AB par rapport au cercle; trouver l'enveloppe de la droite PB.

6° Étant donnés un cercle et deux droites fixes, on prend sur ces droites deux points conjugués, c'est-à-dire tels que la polaire de l'un par rapport au cercle passe par l'autre; trouver l'enveloppe de la droite qui joint ces points conjugués.

7° Trouver l'enveloppe des côtés des triangles inscrits dans une circonférence et dont les hauteurs concourent en un point donné.

8° Trouver l'enveloppe des cordes d'une conique vues d'un point fixe O sous un angle droit.

9° L'un des côtés d'un angle de grandeur constante passe par un point fixe O, son sommet décrit une droite ou une circonférence; trouver l'enveloppe du second côté de l'angle.

10° Trouver l'enveloppe des cordes d'une cissoïde vues du point de rebroussement sous un angle droit.

11° Enveloppe des cercles passant par un point donné et qui interceptent des cordes de longueur donnée sur un cercle donné.

12° Enveloppe des cercles passant par un point donné et vus d'un point donné sous un angle donné.

13° On donne une droite D et un point O; trouver l'enveloppe des cercles qui passent par le point O et interceptent sur la droite D des cordes vues du point O sous un angle donné.

14° Démontrer analytiquement toutes les propositions établies géométriquement au paragraphe (149).

## CHAPITRE III

### CONCAVITÉ. — CONVEXITÉ.

**153. Définition.** — *On dit qu'une courbe est concave en un de ses points* M *vers les ordonnées positives quand les deux arcs* MA, MB *aussi petits que l'on voudra, pris de part et d'autre du point* M, *sont par rapport à la tangente en ce point dans la région des ordonnées positives.*

*Quand ces deux arcs sont dans la région des ordonnées négatives, la courbe est convexe au point* M *vers les ordonnées positives.*

**Théorème.** — *Une courbe est concave en un de ses points* M *vers les ordonnées positives quand, pour ce point, la dérivée seconde de l'ordonnée est positive.*

Appelons $x_1$ et $y_1$ les coordonnées du point M, l'équation de la tangente au point M sera de la forme

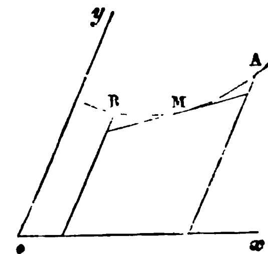


Fig. 119.

$$Y = xy_1' + b.$$

Soit $y$ l'ordonnée d'un point de la courbe qui correspond à l'abscisse $x$; prenons de part et d'autre du point M deux arcs MA, MB assez petits pour que la fonction

$$z = y - Y = y - xy_1' - b$$

varie toujours dans le même sens: 1° quand on parcourt l'arc BM, 2° quand on parcourt l'arc MA.

La courbe étant concave au point M vers les ordonnées positives, la fonction $z$ sera positive pour tous les points de l'arc BM, elle sera nulle au point M et de nouveau positive pour tous les points de l'arc MA. Il résulte de là que la fonction $z$ est minimum pour $x = x_1$, et que, pour cette valeur de l'abscisse, sa dérivée première est nulle, sa dérivée seconde n'étant pas négative. Or, on a

$$z' = y' - y_1' \text{ et } z'' = y'';$$

pour $x=x_1$, on a bien $z'=0$, puisque $y'$ devient $y'_1$ : on doit donc avoir

$$y''_1>0,$$

en écartant l'hypothèse $y''_1=0$.

On démontrerait de la même manière le théorème suivant :

**Théorème.** — *Une courbe est convexe en un de ses points* M *vers les ordonnées positives quand, pour ce point, la dérivée seconde de l'ordonnée est négative.*

**Remarque.** — Si pour le point M la dérivée seconde de l'ordonnée est nulle, la courbe est concave vers les ordonnées positives quand la première des dérivées de $y$ qui n'est pas nulle pour $x=x_1$ est d'ordre pair et positive.

Si cette même dérivée était négative, la courbe serait convexe vers les ordonnées positives.

## Points d'inflexion.

**154. Définition.** — *On dit qu'il y a inflexion en un point* M *d'une courbe quand les deux arcs* MA, MB, *aussi petits que l'on voudra, pris de part et d'autre du point* M, *sont par rapport à la tangente en ce point dans des régions différentes.*

**Théorème.** — *En un point d'inflexion, la dérivée seconde de l'ordonnée est nulle.*

Considérons encore la fonction

$$z=y-Y=y-xy'_1-b,$$

et prenons de part et d'autre du point M deux arcs MA, MB, assez petits pour que cette fonction varie toujours dans le même sens : 1° quand on parcourt l'arc BM ; 2° quand on parcourt l'arc MA. On voit facilement que la fonction $z$ est constamment croissante ou constamment décroissante quand on parcourt l'arc BMA ; mais sa dérivée première est nulle au point M ; donc, en ce point sa dérivée seconde devra être nulle, et l'on aura $y''_1=0$. Plus généralement la première des dérivées de l'ordonnée qui ne s'annule pas pour $x=x_1$ sera d'ordre impair.

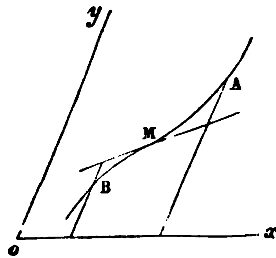


Fig. 122.

**Remarque.** — La démonstration précédente suppose qu'au point d'inflexion M la tangente n'est pas parallèle à l'axe des $y$ ; quand il en est ainsi, on démontre de la même manière qu'en un point d'inflexion la dérivée seconde de l'abscisse, considérée comme fonction de l'ordonnée, doit être nulle, et plus généralement que la première des dérivées de l'abscisse qui n'est pas nulle doit être d'ordre impair.

Soit maintenant $f(x,y)=0$ l'équation de la courbe, on a

$$f'_x + y' f'_y = 0$$
$$f''_{x^2} + 2y' f''_{xy} + y'^2 f''_{y^2} + y'' f'_y = 0.$$

En un point d'inflexion $y''$, est nulle ; donc les coordonnées d'un point d'inflexion seront déterminées par les deux équations

$$(1) \qquad f(x,y)=0,$$
$$(2) \qquad f''_{x^2}(f'_y)^2 - 2 f''_{xy} f'_x f'_y + f''_{y^2}(f'_x)^2 = 0.$$

En exprimant que la dérivée seconde de l'abscisse est nulle on retrouve l'équation (2) ; donc, en résolvant les équations (1) et (2), on obtiendra tous les points d'inflexion, même ceux pour lesquels la tangente est parallèle à l'axe des $y$.

**Cas où la courbe est algébrique.** — **Théorème.** — *La tangente en un point d'inflexion* M *rencontre la courbe en un nombre impair de points confondus avec* M.

Pour démontrer ce théorème, nous supposerons que la courbe est algébrique. Soient

$$f(x,y)=0$$

son équation mise sous forme entière, et

$$y = ax + b$$

celle de la tangente au point d'inflexion $M(x_1, y_1)$. Les abscisses des points où cette tangente rencontre la courbe sont les racines de l'équation $u = f(x, ax+b) = 0$.

On a

$$u'_x = f'_x + a f'_y \qquad u''_{x^2} = (f''_x + a f''_y)^{(2)};$$

de plus, de l'équation de la courbe on tire

$$f'_x + y'f'_y = 0 \qquad \text{et} \qquad (f''_x + y'f''_y)^{(2)} + y''f'_y = 0.$$

Pour le point d'inflexion M, on a

$$y' = a, y'' = 0;$$

donc, pour ce point, les fonctions $u$, $u'_x$, $u''_{x}$, sont nulles, et l'équation $u = 0$ admet une racine triple $x = x_1$.

Si la première des dérivées de l'ordonnée qui ne s'annule pas pour $x = x_1$ était de l'ordre $2p + 1$, on verrait de même que l'équation $u = 0$ admet la racine $x = x_1$ avec le degré $2p + 1$ de multiplicité.

**Recherche des points d'inflexion.** — Du théorème précédent il résulte que, pour trouver les points d'inflexion d'une courbe algébrique, il suffira d'exprimer qu'une tangente la rencontre en un nombre impair de points confondus avec le point de contact.

Soient

$$f(x, y, z) = 0$$

l'équation de la courbe rendue homogène, et $x_1$, $y_1$ les coordonnées du point d'inflexion M. Pour avoir les coordonnées des points où une sécante passant par le point M rencontre la courbe, il faudra résoudre par rapport à $\mu$ l'équation

$$\begin{aligned} & f(x_1, y_1, z_1) + \mu(x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1}) \\ (3) \qquad & + \frac{\mu^2}{2!}(x f''_{x_1} + y f''_{y_1} + z f''_{z_1})^{(2)} \ldots + \mu^m f(x, y, z) = 0, \end{aligned}$$

et porter ces valeurs dans les formules

$$\frac{\alpha}{x_1 + \mu x} = \frac{\beta}{y_1 + \mu y} = \frac{\gamma}{z_1 + \mu z},$$

après avoir posé $z = z_1 = \gamma = 1$.

Le point M étant sur la courbe, le premier terme de l'équation (3) est nul ; si l'on fait coïncider la sécante avec la tangente au point M, le coefficient de $\mu$ sera également nul, et l'équation (3) admettra la racine double $\mu = 0$. Pour qu'elle admette cette racine avec le degré *trois* de multiplicité, c'est-à-dire pour que la tangente rencontre la courbe en trois points confondus avec M, il faut que le coefficient de $\mu^2$ soit également nul.

En résumé, on devra avoir

$$(4)\quad x^2 f''_{x_1^2} + y^2 f''_{y_1^2} + z^2 f''_{z_1^2} + 2yz f''_{y_1 z_1} + 2zx f''_{z_1 x_1} + 2xy f''_{x_1 y_1} = 0$$

pour toutes les valeurs de $x$, $y$, $z$ satisfaisant à l'équation

$$(5)\qquad x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} = 0.$$

On voit donc que le premier membre de l'équation (4) devra être divisible par $x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1}$; par suite, ce premier membre sera la somme des carrés de *deux* fonctions linéaires et homogènes des variables $x, y, z$, et les coordonnées du point d'inflexion devront satisfaire à l'équation

$$H = \begin{vmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1 y_1} & f''_{x_1 z_1} \\ f''_{y_1 x_1} & f''_{y_1^2} & f''_{y_1 z_1} \\ f''_{z_1 x_1} & f''_{z_1 y_1} & f''_{z_1^2} \end{vmatrix} = 0.$$

*Réciproquement, quand la relation* $H = 0$ *est satisfaite, le premier membre de l'équation* (4) *est divisible par le premier membre de l'équation* (5).

En effet, si dans l'équation (4) on pose $z = 1$, elle représente une courbe du second degré C; cette courbe passe par le point M, car on a l'identité

$$(x_1 f''_{x_1} + y_1 f''_{y_1} + z_1 f''_{z_1})^{(2)} = m(m-1) f(x_1, y_1, z_1),$$

et la quantité $f(x_1, y_1, z_1)$ s'annule quand on pose $z_1 = 1$.

En second lieu, la courbe C touche au point M la droite représentée par l'équation (5), car l'équation de la tangente au point M de la courbe C est

$$x(x_1 f''_{x_1^2} + y_1 f''_{x_1 y_1} + z_1 f''_{x_1 z_1}) + y(x_1 f''_{y_1 x_1} + y_1 f''_{y_1^2} + z_1 f''_{y_1 z_1}) \\ + z(x_1 f''_{z_1 x_1} + y_1 f''_{z_1 y_1} + z_1 f''_{z_1^2}) = 0,$$

ou

$$x f'_{x_1} + y f'_{y_1} + z f'_{z_1} = 0.$$

Maintenant, comme H est nul, la courbe C se compose de deux droites, dont l'une sera la tangente représentée par l'équation (5).

Pour compléter cette démonstration, il faut encore faire voir

que les deux droites qui composent la courbe C quand H est nul ne se coupent pas au point M. Or, pour que le point M soit le centre de la courbe C, on devrait avoir

$$\begin{aligned} x_1 f''_{x_1^2} + y_1 f''_{x_1 y_1} + z_1 f''_{x_1 z_1} &= 0 \\ x_1 f''_{y_1 x_1} + y_1 f''_{y_1^2} + z_1 f''_{y_1 z_1} &= 0 \\ x_1 f''_{z_1 x_1} + y_1 f''_{z_1 y_1} + z f''_{z_1^2} &= 0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$f'_{x_1} = 0 \qquad f'_{y_1} = 0 \qquad f'_{z_1} = 0.$$

Nous verrons plus loin que le point M serait alors un point *multiple*, ce que nous ne supposons pas.

En résumé on obtiendra les points d'inflexion en cherchant les points de rencontre des courbes qui ont pour équations

$$f(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad H = 0.$$

La seconde de ces courbes a reçu le nom de ***Hessienne;*** si la courbe proposée est de l'ordre $m$, la Hessienne est de l'ordre $3(m-2)$ ; on peut donc énoncer le théorème suivant :

**Théorème.** — *Une courbe d'ordre* $m$ *a* $3m(m-2)$ *points d'inflexion.*

**Remarque.** — Pour que le théorème précédent soit exact, il faut qu'il n'existe aucune relation entre les coefficients des termes de l'équation de la courbe.

Ainsi, par exemple, si la tangente au point M rencontre la courbe en un nombre pair de points au moins égal à *quatre*, le point M sera situé sur la Hessienne, et cependant il ne sera pas un point d'inflexion.

Le nombre des points d'inflexion sera encore inférieur à $3m(m-2)$ quand la courbe aura des points *multiples*, car on démontre que ces points sont situés sur la Hessienne.

**Applications.** — 1° *Trouver les points d'inflexion de la courbe qui a pour équation*

$$x^4 - y^4 + a^2x^2 - 2a^4 = 0.$$

L'équation de la Hessienne est

$$y^2(2x^4 - 25a^2x^2 - 4a^4) = 0;$$

elle se décompose en deux autres :

$$y=0 \qquad 2x^4-25a^2x^2-4a^4=0.$$

A la deuxième équation correspondent quatre points d'inflexion ; mais à la solution $y=0$ ne correspond pas un point d'inflexion.

En effet, la courbe proposée rencontre l'axe des $x$ en deux points réels qui ont pour abscisses $\pm a$, et les tangentes en ces points qui sont parallèles à l'axe des $y$ coupent chacune la courbe en *quatre* points confondus avec le point de contact.

2° *Trouver les points d'inflexion de la courbe qui a pour équation*

$$2x^3-y^3+(y-x)^2=0.$$

L'équation de la Hessienne est

$$(y-x)^2(2x-y)=0.$$

Elle se décompose en deux autres :

$$y-x=0 \qquad 2x-y=0.$$

A la solution $y-x=0$ correspond l'origine qui n'est pas un point d'inflexion, bien que la tangente à l'origine qui est la première bissectrice rencontre la courbe en trois points confondus avec l'origine ; cela tient à ce que l'origine est un point de *rebroussement*.

A la solution $2x-y=0$ correspond l'origine et un autre point dont les coordonnées sont $\left(x=\frac{1}{6}\ y=\frac{1}{3}\right)$ ; ce point est un point d'inflexion.

# CHAPITRE IV

## POINTS SINGULIERS.

**155.** Considérons un point M d'une courbe plane; menons la tangente TT' en ce point, puis traçons une circonférence de cercle ayant pour centre le point M et un rayon infiniment petit. En général, cette circonférence ne coupera la courbe qu'en deux points $m$, $m'$, et dans le triangle $mMm'$ l'angle opposé à la corde $mm'$ différera infiniment peu de deux angles droits.

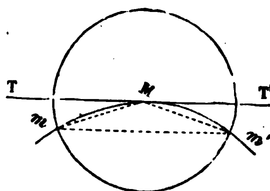


Fig. 121.

Quand ces deux circonstances ne se présentent pas simultanément, on dit que le point M est un *point singulier*.

Nous allons énumérer les diverses espèces de points singuliers que l'on peut rencontrer: nous ne nous occuperons d'abord que des courbes *algébriques*.

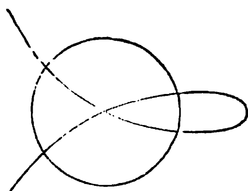
Soient $f(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe algébrique d'ordre $m$, et $y = ax + b$ l'équation d'une droite; les abscisses des points où la droite rencontre la courbe seront les racines de l'équation

$$(1) \qquad f(x, ax + b) = 0.$$

Si la courbe est la plus générale de son degré, c'est-à-dire si les coefficients de ses différents termes ne sont liés par aucune relation, l'équation (1) n'aura pas de racines multiples et la droite rencontrera la courbe en $m$ points distincts.

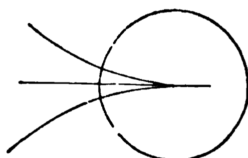
Si, au contraire, la courbe n'est pas la plus générale de son degré, il pourra arriver que l'équation (1) admette une racine $x = x_1$ avec le degré $p$ de multiplicité; à cette racine correspondra un point $M(x_1, y_1)$, et nous dirons que la droite rencontre la courbe en $p$ points confondus avec le point M. Au point de vue de la géométrie, la droite rencontrera la courbe au point M et en $m - p$ autres points distincts entre eux et du point M.

**Points multiples.** — *On dit qu'un* M *situé sur une courbe d'ordre m est un point multiple d'ordre p, lorsqu'une sécante quelconque passant par ce point rencontre la courbe en p points confondus avec* M.

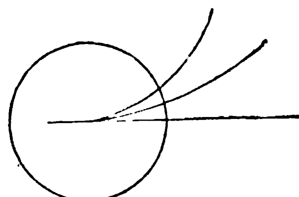

Fig. 122.

La circonférence de cercle décrite d'un point multiple comme centre, avec un rayon infiniment petit, coupe la courbe en plus de deux points.

**Points de rebroussement.** — *On appelle point de rebroussement celui où s'arrêtent deux branches de courbe qui touchent en ce point la même droite.*


Fig. 123.

La circonférence de cercle décrite d'un point de rebroussement comme centre avec un rayon infiniment petit ne rencontre la courbe qu'en deux points $m, m'$; mais dans le triangle $Mmm'$, l'angle opposé à la corde $mm'$ est infiniment petit.


Fig. 124.

On distingue deux genres de points de rebroussement.

Le rebroussement est dit du *premier genre* lorsque les deux branches de courbe sont situées de part et d'autre de la tangente commune (*fig.* 123).

Le rebroussement est dit du *second genre* quand les deux branches de courbe sont situées d'un même côté de la tangente commune (*fig.* 124).

**Point isolé.** — *On nomme point isolé un point qui n'est voisin d'aucun autre point de la courbe.*

La circonférence de cercle décrite d'un point isolé comme centre avec un rayon infiniment petit ne rencontre la courbe en aucun point.

Un point isolé est un point multiple; il est en effet facile de démontrer qu'un point simple d'une courbe ne saurait être isolé.

Prenons ce point pour origine et la tangente en ce point pour axe des $x$, l'équation de la courbe sera de la forme

$$y + \varphi_2(x, y) + \ldots + \varphi_m(x, y) = 0,$$

où $\varphi_p(x, y)$ représente un polynôme homogène du degré $p$.

De l'origine comme centre décrivons un cercle ayant $\rho$ pour rayon, les coordonnées d'un point $m$ de sa circonférence auront pour expressions

$$x = \rho \frac{\sin(\theta - \omega)}{\sin\theta} \qquad y = \rho \frac{\sin\omega}{\sin\theta},$$

en représentant par $\theta$ l'angle des axes et par $\omega$ l'angle polaire du point $m$.

Les valeurs de $\omega$ qui correspondent aux points où la courbe est rencontrée par la circonférence du cercle seront données par une équation de la forme

$$u = \sin\omega + M\rho = 0,$$

M représentant un polynôme qui ne devient pas infini quand $\rho$ tend vers zéro.

Soit $\varepsilon$ une quantité aussi petite que l'on voudra; si l'on donne à $\omega$ les valeurs $\pm\varepsilon$, la fonction $u$ prendra les valeurs

$$u_1 = \quad \sin\varepsilon + M_1\rho$$
$$u_2 = -\sin\varepsilon + M_2\rho.$$

On peut toujours prendre $\rho$ assez petit pour que les quantités $u_1$, $u_2$ aient le signe de leur premier terme, c'est-à-dire des signes contraires; il résulte de là que la fonction $u$ s'annule quand $\omega$ varie de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$; donc la circonférence décrite de l'origine comme centre avec un rayon infiniment petit rencontre la courbe, et l'origine n'est pas un point isolé.

De ce qui précède il résulte que tous les points singuliers que nous avons définis sont des points multiples.

**Théorème.** — *Pour qu'un point* $M(x_1, y_1)$ *d'une courbe algébrique soit un point singulier, il faut et il suffit que ses coordonnées annulent les trois dérivées partielles du premier ordre* $f'_x, f'_y, f'_z$ *du premier membre de l'équation de la courbe, rendue homogène, dérivées dans lesquelles on remplacera* $z$ *par l'unité.*

Soient $M(x_1, y_1)$ un point de la courbe et $(x, y)$ les coordonnées d'un point P pris sur une sécante passant par le point M; on aura les coordonnées des points où cette sécante rencontre la courbe en résolvant par rapport à $\mu$ l'équation

$$(2) \qquad \begin{aligned} & f(x_1, y_1, z_1) + \mu(xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1}) \\ & + \frac{\mu^2}{2!}(xf''_{x_1} + yf''_{y_1} + zf''_{z_1})^{(2)} + \ldots + \mu^m f(x, y, z) = 0, \end{aligned}$$

et portant les valeurs trouvées dans les formules

$$\frac{\alpha}{x_1 + \mu x} = \frac{\beta}{y_1 + \mu y} = \frac{\gamma}{z_1 + \mu z},$$

après avoir posé $z = z_1 = \gamma = 1$.

Le point M étant sur la courbe, le premier terme de l'équation (2) est nul; pour que le point M soit un point multiple, il faut et il suffit que cette équation admette la racine $\mu = 0$ au moins avec le degré *deux* de multiplicité, et cela *quels que soient* $x, y, z$ ; les coordonnées d'un point multiple satisferont donc aux trois équations

$$f'_x = 0 \qquad f'_y = 0 \qquad f'_z = 0,$$

après qu'on aura posé $z = 1$.

Si les trois dérivées partielles du premier ordre de la fonction $f(x, y, z)$ sont nulles, une dérivée du second ordre au moins ne l'étant pas, le point M sera un point double. En général, si toutes les dérivées partielles de la fonction $f$ sont nulles jusqu'aux dérivées d'ordre $p$ exclusivement, le point M sera un point multiple d'ordre $p$.

*Tangentes en un point multiple.* — Supposons que le point M soit un point multiple d'ordre $p$, les coefficients des $p$ premiers termes de l'équation (2) seront nuls, quels que soient $x$, $y$, $z$. Égalons à zéro le coefficient de $\mu^p$, nous aurons l'équation

$$\left(x f_{x_1}^{(p)} + y f_{y_1}^{(p)} + z f_{z_1}^{(p)}\right)^{(p)} = 0,$$

qui, quand on y aura posé $z = z_1 = 1$, représentera une courbe C. Assujettissons le point P à se trouver en un point *quelconque* de cette courbe, alors les droites MP rencontreront la courbe proposée en $p + 1$ points confondus avec M; ces droites seront donc les tangentes au point M aux $p$ arcs de la courbe proposée qui passent par ce point. Il résulte de là que la courbe C représente justement les tangentes au point M de la courbe proposée.

Nous allons maintenant étudier chacun des arcs qui passent par un point multiple.

## Étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points.

**156.** On peut toujours supposer que le point à étudier coïncide avec l'origine ; s'il en était autrement on commencerait par transporter l'origine au point considéré.

En groupant ensemble les termes de même degré, l'équation de la courbe prend la forme

$$\varphi_p(x,y)+\varphi_{p+1}(x,y)+\ldots+\varphi_m(x,y)=0,$$

l'indice $p$ étant au moins égal à l'unité.

Coupons la courbe par la droite qui a pour équation $y=tx$, les abscisses des points de rencontre seront les racines de l'équation

$$x^p\varphi_p(1,t)+x^{p+1}\varphi_{p+1}(1,t)+\ldots+x^m\varphi_m(1,t)=0,$$

le premier membre étant divisible par $x^p$, toute droite passant par l'origine rencontre la courbe en des points dont $p$ coïncident avec l'origine, qui est un point multiple d'ordre $p$. Les abscisses des $m-p$ autres points de rencontre sont les racines de l'équation

$$(3) \qquad \varphi_p(1,t)+x\varphi_{p+1}(1,t)+\ldots+x^{m-p}\varphi_m(1,t)=0.$$

Soit $t_1$ une racine de l'équation $\varphi_p(1,t)=0$ ; nous distinguerons deux cas.

**Premier cas.** — *La racine $t_1$ est simple.* — Soit $\varphi_{p+q}(1,t)$ la première des fonctions $\varphi(1,t)$ qui ne s'annule pas pour $t=t_1$ ; posons

$$\varphi_p(1,t)=(t-t_1)\psi(1,t),$$

et divisons par $\psi(1,t)$ les deux membres de l'équation (3); elle prendra la forme

$$f(t)=t-t_1+xu_1+x^2u_2+\ldots+x^qu_q+\ldots=0,$$

$u$ désignant des fonctions de $t$ qui ne deviennent pas infinies pour $t=t_1$.

La dérivée de $f(t)$ prise par rapport à $t$ a pour expression

$$f'(t) = 1 + xu'_1 + x^2u'_2 + \dots$$

Représentons par $\alpha$ une quantité positive aussi petite que l'on voudra ; on pourra trouver un nombre positif $\varepsilon$ assez petit pour que, $x$ variant de $-\varepsilon$ à $+\varepsilon$, les conditions suivantes soient remplies :

1° Dans cet intervalle, $f'(t)$ aura le signe de son premier terme pour les valeurs de $t$ comprises entre $t_1 - \alpha$ et $t_1 + \alpha$ ;

2° Dans le même intervalle, $f(t)$ aura pour $t = t_1 \pm \alpha$ et pour $t = t_1$ le signe du premier de ses termes qui ne s'annule pas.

Pour fixer les idées, nous supposerons que $u_q$ est positif quand on y remplace $t$ par $t_1$ ; nous subdiviserons le premier cas que nous étudions en deux autres :

1° *$q$ est impair.* — Construisons les droites

$$\left.\begin{array}{l} oA'' \\ oA \\ oA' \end{array}\right\} \text{ qui ont pour équations } \left\{\begin{array}{l} y = (t_1 - \alpha)x \\ y = t_1 x \\ y = (t_1 + \alpha)x \end{array}\right.$$

et les droites D, D' qui ont pour équations $x = \pm \beta$, la quantité $\beta$ étant comprise entre zéro et $\varepsilon$. Les droites D et D' rencontrent les droites $o$A, $o$A', $o$A'' aux points A, A' A'', B, B', B''; les signes que prend la fonction $f(t)$ pour les valeurs de $x$ et de $t$ qui correspondent à ces points de rencontre sont indiqués sur la figure 125.

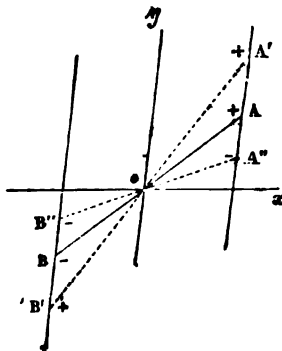


Fig. 125.

On voit que la courbe a *au moins* un point sur chacun des segments AA'', BB', et elle n'en a *qu'un seul*, car, par hypothèse, la dérivée $f'(t)$ est positive en tous les points des segments AA'' et BB'. Pour la même raison, la courbe n'a aucun point sur les segments AA' et BB''.

Ces résultats sont vrais, quelque petit que soit $\alpha$ ; donc, par l'origine passe un arc de courbe tangent à la droite qui a pour équation $y = t_1 x$ et convexe vers les ordonnées positives.

**Remarque.** — Si $u_q$ était négatif pour $t = t_1$, l'arc serait concave vers les ordonnées positives.

2° *q est pair.* — Les signes que prend la fonction $f(t)$ pour les valeurs de $x$ et de $t$ qui correspondent aux points A, A', A'', B, B', B'' sont indiqués sur la figure 126.

On voit que la courbe a un seul point sur chacun des segments AA'', BB'', et qu'elle n'en a pas sur les segments AA', BB'. L'arc qui touche à l'origine la droite qui a pour équation $y = t_1 x$ présente en ce point *une inflexion*.

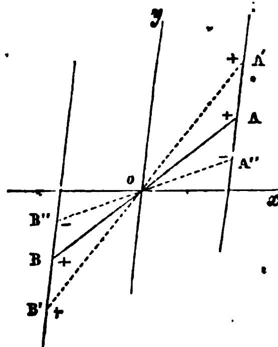


Fig. 126.

**Deuxième cas.** — *La racine $t_1$ est multiple.* — L'étude de ce second cas est beaucoup plus difficile que celle du premier ; pour pouvoir la faire complètement, nous commencerons par donner quelques notions sur les racines *infiniment petites* d'une équation algébrique.

**157.** Soit

$$(4) \qquad f(x, y) = 0$$

une équation algébrique dans laquelle $y$ représente l'inconnue, et $x$ un paramètre arbitraire ; si $n$ racines de cette équation tendent vers zéro quand $x$ tend lui-même vers zéro, nous dirons que l'équation admet $n$ racines infiniment petites.

Regardons $x$ comme infiniment petit du premier ordre, et supposons que le quotient $\frac{y}{x^\mu}$ tende vers une limite qui n'est ni nulle ni infinie quand $x$ tend vers zéro ; nous dirons que $y$ est infiniment petit de l'ordre $\mu$.

Il pourra arriver que les $n$ racines infiniment petites se partagent en plusieurs groupes ; les racines du premier groupe étant de l'ordre $\mu_1$, celles du second groupe de l'ordre $\mu_2, \ldots$

Nous nous proposons de chercher le nombre des racines réelles de chaque groupe et de séparer ces racines. Pour résoudre cette question, nous suivrons la méthode qui a été employée par M. Puiseux dans ses Recherches sur les fonctions algébriques (*Journal de mathématiques pures et appliquées*, t. XV). Elle consiste à développer chaque racine suivant les puissances croissantes de $x$.

Désignons par $\mu$ l'ordre des racines infiniment petites d'un groupe quelconque et posons

$$y = zx^{\mu} + y_1,$$

l'ordre de $y_1$ surpassant $\mu$; la quantité $zx^{\mu}$ est appelée la *valeur principale* de $y$.

Pour développer $y$, nous chercherons : 1° *L'exposant* $\mu$ *de ce terme principal; 2° son coefficient* $z$.

Nous établirons d'abord les deux propositions suivantes :

1° *Le nombre des termes de l'ordre le moins élevé dans l'équation* (4) *est au moins égal à deux.*

Un terme quelconque de l'équation (4) est de la forme $Ax^{\beta}y^{\alpha}$ ; il devient $Az^{\alpha}x^{\beta+\mu\alpha}$ quand on y remplace $y$ par sa valeur principale. L'ordre de ce terme est $\beta + \mu\alpha$.

Maintenant l'équation (4) doit être satisfaite, *quel que soit* $x$, quand on remplace $y$ par $zx^{\mu} + y_1$. En particulier, les termes d'ordre minimum doivent s'y détruire; donc leur nombre est au moins égal à *deux*.

2° *L'ordre* $\mu$ *des racines infiniment petites est commensurable.*

Soient

$$A_1x^{\beta_1}y^{\alpha_1} + \Sigma Ax^{\beta}y^{\alpha} + A_2x^{\beta_2}y^{\alpha_2}$$

le groupe des termes de l'ordre le moins élevé dans l'équation (4), ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de $y$, groupe contenant au moins *deux* termes ; nous aurons

$$(5) \qquad \beta_1 + \mu\alpha_1 = \beta + \mu\alpha = \beta_2 + \mu\alpha_2 ;$$

d'où

$$\mu = -\frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{\beta - \beta_2}{\alpha - \alpha_2};$$

donc $\mu$ est commensurable.

**Détermination de l'exposant** $\mu$. — Newton a donné une construction géométrique élégante pour déterminer les valeurs de l'exposant $\mu$ (*). Traçons dans le plan deux axes $o\alpha$, $o\beta$ et représentons chaque terme tel que $Ax^{\beta}y^{\alpha}$ de l'équation (4) par un point M ayant $\alpha$ pour abscisse et $\beta$ pour ordonnée; ces points jouiront des propriétés suivantes :

1° *Il y aura au moins un point sur chacun des axes* $o\alpha$, $o\beta$.

En effet, l'équation (4) doit contenir au moins un terme indé-

(*) NEWTON, *Methodus functionum et serierum infinitarum.* Londinii, 1736.

pendant de $x$ et au moins un terme indépendant de $y$, sans quoi son premier membre serait divisible par une puissance de $y$ ou par une puissance de $x$.

2° *Les points qui correspondent aux termes d'ordre minimum sont sur une même droite* D.

En effet, les relations (5) montrent que ces points sont sur la droite D ayant pour équation

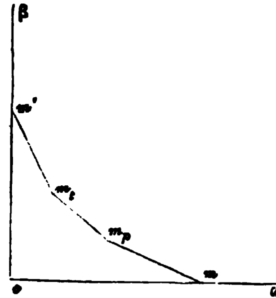


Fig. 127.

(D) $\quad y - \beta_1 + \mu(x - \alpha_1) = 0.$

3° *Les points qui correspondent aux termes dont l'ordre n'est pas minimum sont dans la région positive de la droite* D.

En effet, pour un de ces termes $A'x^{\beta'}y^{\alpha'}$ on a la relation $\beta' + \mu\alpha' > \beta_1 + \mu\alpha_1$ ; elle exprime que le premier membre de l'équation (D) est positif pour $x = \alpha', y = \beta'$.

Cela posé, pour déterminer les ordres $\mu_1, \mu_2, \ldots$ des racines infiniment petites des différents groupes, on procédera comme il suit :

On imaginera une droite coïncidant d'abord avec l'axe $o\alpha$, et on la fera tourner autour du point $m$ le plus voisin de l'origine parmi ceux qui sont situés sur l'axe $o\alpha$, dans un sens tel que l'ordonnée à l'origine de la droite mobile aille toujours en croissant (*fig.* 127). On arrêtera ce mouvement de rotation dès que la droite mobile passera par quelqu'un des points M; dans cette position, elle pourra contenir plusieurs points $m_1, m_2, \ldots, m_p$. On fera ensuite tourner la droite mobile, toujours dans le même sens, autour du point $m_p$ le plus éloigné de $m$, jusqu'à ce qu'elle atteigne de nouveaux points. On continuera de la même manière, jusqu'à ce que la droite mobile passe par le point $m'$ le plus voisin de l'origine parmi ceux qui sont situés sur l'axe $o\beta$.

On formera ainsi une ligne brisée convexe $m m_p \ldots\ m'$ telle que, par rapport à chacun de ses côtés, tous les points non situés sur ce côté seront dans la région des $\beta$ positifs. *Les coefficients angulaires, changés de signe, de ces côtés donneront les valeurs des exposants* $\mu_1, \mu_2, \ldots$ Cela résulte de la troisième des propriétés établie plus haut.

**Détermination des coefficients $z$.** — Soient $\frac{p}{q}$ une fraction irréductible égale à l'un des exposants $\mu$ et

$$A_1 x^{\beta_1} y^{\alpha_1} + \Sigma A x^{\beta} y^{\alpha} + A_2 x^{\beta_2} y^{\alpha_2}$$

l'ensemble des termes de l'ordre le moins élevé, dans l'équation (4), ordonnés par rapport aux puissances décroissantes de $y$; nous aurons

$$(6) \qquad q\beta_1 + p\alpha_1 = q\beta + p\alpha = q\beta_2 + p\alpha_2.$$

Pour éviter les exposants fractionnaires, posons

$$x = x'^q \qquad y = zx'^p + y_1$$

et portons ces valeurs dans l'équation (4); cette équation divisée par $x'^{q\beta_1 + p\alpha_1}$ prendra la forme

$$(7) \qquad A_1 z^{\alpha_1} + \Sigma A z^{\alpha} + A_2 z^{\alpha_2} + Mx' = 0.$$

Quand $x$ tend vers zéro, $x'$ tend également vers zéro, et l'équation (7) devient

$$(8) \qquad A_1 z^{\alpha_1 - \alpha_2} + \Sigma A z^{\alpha - \alpha_2} + A_2 = 0,$$

après qu'on l'a divisée par $z^{\alpha_2}$, ce qui est permis, puisqu'on ne s'occupe que des valeurs de $z$ qui ne tendent pas vers zéro.

L'équation (8) déterminera les coefficients $z$ des valeurs principales des racines d'ordre $\frac{p}{q}$; on peut abaisser son degré. En effet, les relations (6) donnent

$$\frac{p}{q} = -\frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2} = -\frac{\beta - \beta_2}{\alpha - \alpha_2};$$

la fraction $\frac{p}{q}$ étant irréductible, on aura $\alpha_1 - \alpha_2 = n_1 q$, $\alpha - \alpha_2 = nq$, les nombres $n$ et $n_1$ étant entiers. Si l'on pose $z^q = u$, l'équation (8) deviendra

$$(9) \qquad A_1 u^{n_1} + \Sigma A u^{n} + A_2 = 0;$$

on sera donc ramené à résoudre l'équation (9) et une équation binome $z^q = u$.

**158.** Supposons d'abord que l'équation (9) n'ait pas de racines égales. A chaque racine simple $u$ de cette équation correspondront, pour l'équation (4), $q$ racines infiniment petites; leurs valeurs principales seront distinctes et égales aux valeurs du produit $\sqrt[q]{u}\,\sqrt[q]{x^p} = \sqrt[q]{ux^p}$. Les racines infiniment petites de l'ordre $\frac{p}{q}$ seront alors séparées.

**Discussion.** — On ne doit considérer que les valeurs principales qui sont *réelles;* pour les mettre en évidence nous distinguerons deux cas.

I. *q est impair.* — On prendra alors pour $u$ toutes les racines réelles positives ou négatives de l'équation (9). Chacune d'elles donnera pour $y$ *une seule* valeur principale réelle.

II. *q est pair.* — Nous subdiviserons ce cas en deux autres.

1° *On donne à x des valeurs positives.* — On prendra encore les racines positives de l'équation (9). Chacune d'elles donnera pour $y$ *deux* valeurs principales réelles égales et de signes contraires.

2° *On donne à x des valeurs négatives.* — La fraction $\frac{p}{q}$ étant irréductible et $q$ étant pair, $p$ est impair; par suite, $x^p$ est négatif. On devrait donc prendre pour $u$ les racines *négatives* de l'équation (9) et les valeurs correspondantes de $z = \sqrt[q]{u}$ seraient *imaginaires.*

Pour éviter cet inconvénient, au lieu de poser

$$u = x'^q \qquad y = zx'^p + y_1$$

on posera

$$x = -x'^q \quad y = zx'^p + y_1.$$

Les valeurs principales de $y$ auront alors pour expression $\sqrt[q]{-ux^p}$, la quantité $u$ étant racine de l'équation

$$(9') \qquad (-1)^{\beta_2-\beta_1} A_1 u^{\alpha_1} + \Sigma(-1)^{\beta_2-\beta} A u^{\alpha} + A_2 = 0.$$

On prendra toutes les racines *réelles positives* de l'équation (9').

Chacune d'elles donnera pour $y$ *deux* valeurs principales réelles égales et de signes contraires, et les valeurs correspondantes de $z$ seront *réelles* comme dans les cas précédents.

**Remarque.** — L'équation (9') est la transformée en $-u$ de l'équation (9); car $p$ étant impair, les relations $\beta_2 - \beta_1 = n_1 p$, $\beta_2 - \beta = np$ montrent que les nombres $\beta_2 - \beta_1$, $\beta_2 - \beta$ et les nombres $n_1$, $n$ sont respectivement de même parité.

Supposons maintenant que l'équation (9) ait des racines multiples. A une racine multiple $u_1$ d'ordre $r$ correspondra, pour l'équation (8), un groupe de $q$ racines *chacune d'ordre* $r$. A chacune de ces dernières racines $z_i$ correspondront, pour l'équation(4), $r$ racines infiniment petites ayant la *même* valeur principale $z_i \sqrt[q]{x^p}$.

Pour séparer ces racines on posera $z = z_i + y'$ et l'on portera cette valeur de $z$ dans l'équation (7) qui prendra la forme

$$\Sigma B x'^{\beta} y'^{\alpha} = 0.$$

On traitera cette équation comme on a traité l'équation (4). Si l'équation auxiliaire $F(Z) = 0$, analogue à l'équation (8) que l'on obtient, n'a que des racines *simples réelles*, la séparation des racines infiniment petites de l'équation (4) sera effectuée. Dans le cas contraire, on appliquera la même méthode en continuant jusqu'à ce que l'on arrive à une équation auxiliaire dont toutes les racines *réelles seront simples.*

**Remarque.** — Il est impossible que la suite de ces transformations se prolonge indéfiniment; car s'il en était ainsi, l'équation (4) admettrait des racines égales, quel que soit $x$; cette hypothèse peut être écartée; en effet, on peut toujours commencer par diviser le premier membre de l'équation (4) par le plus grand commun diviseur des polynômes $f(x, y)$ et $f'_y(x, y)$.

**159.** Revenons maintenant à l'étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points, et considérons le cas où l'équation $\varphi_p(1, t) = 0$ a une racine réelle multiple $t = t_1$.

On posera $t = t_1 + \theta$, et en substituant cette valeur dans l'équation

$$(3) \qquad \varphi_p(1, t) + x\varphi_{p+1}(1, t) + \ldots + x^{m-p}\varphi_m(1, t) = 0,$$

on obtiendra une équation de la forme

$$\Sigma A x^{\beta} \theta^{\alpha} = 0,$$

dont on séparera les racines infiniment petites par la méthode que nous avons exposée.

On arrivera ainsi à mettre l'ordonnée $y$ sous la forme

$$(10) \quad y = t_1 x + x \sqrt[q_1]{u_1 x^{p_1}} + \ldots + x \sqrt[q_r]{u_r x^{p_r}} + x \sqrt[q]{U x^{p}},$$

$t_1, u_1, \ldots, u_r$ étant des constantes et U une fonction de $x$ qui, pour $x = 0$ sera racine d'une équation dont toutes les racines réelles seront simples.

Soient $U_1$ une racine réelle de cette équation donnant à l'expression $\sqrt[q]{Ux^p}$ une valeur réelle, et C, C′, C″ les courbes représentées par l'équation (10) quand on y remplace successivement U par $U_1$, $U_1 - \alpha$, $U_1 + \alpha$ ; on pourra répéter tout ce qui a été dit au paragraphe (156), pouvu que l'on remplace les droites $o$A, $o$A′, $o$A″ par les courbes C, C′, C″.

**160.** Pour élucider cette théorie, nous allons l'appliquer à quelques exemples.

**Exemple I.** — Soit la courbe qui a pour équation

$$y - x + (y + x)(y - 2x) + y^3 = 0;$$

en posant $y = tx$, on obtient l'équation

$$t - 1 + (t + 1)(t - 2)x + t^3 x^2 = 0,$$

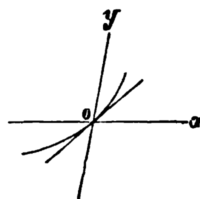


Fig. 123.

et l'on voit immédiatement qu'à l'origine la courbe touche la première bissectrice et qu'elle est concave vers les ordonnées positives.

**Exemple II.** — Soit la courbe qui a pour équation

$$y - x + (y - x)(y - 2x) + y^3 = 0;$$

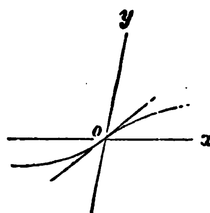


Fig. 129.

on verra facilement que l'origine est un point d'inflexion.

**Exemple III.** — Soit la courbe qui a pour équation

$$(y-x)^2+3(y-x)(y^2+x^2)+(2y-x)x^3=0;$$

en posant $y=tx$, on obtient l'équation

$$(t-1)^2+3(t-1)(t^2+1)x+(2t-1)x^2=0.$$

Pour $x=0$, cette dernière équation a une racine double $t=1$; nous sommes donc conduits à poser $t=1+\theta$, ce qui donne l'équation

$$\theta^2+3\theta(2+2\theta+\theta^2)x+(1+2\theta)x^2=0,$$

dont il faut séparer les racines infiniment petites.

En appliquant la méthode de M. Puiseux, on trouve que l'ordre de ces racines a pour expression $\frac{p}{q}=1$ ; on doit donc poser $\theta=zx$, ce qui donne l'équation

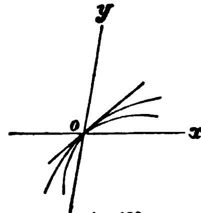


Fig. 130.

$$z^2+3z(2+2zx+z^2x^2)+1+2zx=0,$$

qui, pour $x=0$, se réduit à

$$z^2+6z+1=0.$$

Les valeurs infiniment petites de $z$ sont donc aussi voisines que l'on voudra des quantités $-3\pm\sqrt{8}$; donc, dans le voisinage de l'origine, l'ordonnée de la courbe différera aussi peu que l'on voudra de l'ordonnée de la courbe, qui a pour équation

$$y=x-x^2(3\pm2\sqrt{2});$$

par suite, de l'origine partent deux arcs de courbe tangents à la première bissectrice et convexes vers les ordonnées positives.

**Exemple IV.** — Soit la courbe qui a pour équation

$$(y-2x)^5+(y-2x)^2(y^4+x^4)+y^7=0;$$

en posant $y=tx$, on obtient l'équation

$$(t-2)^5+(t-2)^2(t^4+1)x+t^7x^2=0,$$

qui, pour $x=0$, admet la racine quintuple $t=2$; nous sommes

donc conduits à poser $t = 2 + \theta$, ce qui donne l'équation

$$\theta^5 + \theta^2[(2+\theta)^4 + 1]x + (2+\theta)^7 x^2 = 0,$$

dont il faut séparer les racines infiniment petites.

En appliquant la méthode de M. Puiseux, on trouve que ces racines forment deux groupes qui correspondent aux valeurs $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ du rapport $\frac{p}{q}$.

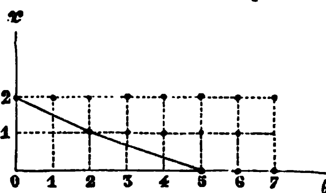


Fig. 131.

Étudions d'abord les racines dont l'ordre est $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$; nous devrons poser $x = x'^2$ et $\theta = zx'$, ce qui donne l'équation

$$z^5x' + z^2\ (2 + zx')^4 + 1] + (2 + zx')^7 = 0,$$

après qu'on a divisé les deux membres par $x'^4$. Quand $x$ tend vers zéro, les valeurs de $z$ tendent vers les racines de l'équation

$$17z^2 + 2^7 = 0,$$

qui devient $17u + 2^7 = 0$ en posant $z^2 = u$. Dans le voisinage de l'origine, l'ordonnée $y$ d'une partie de la courbe différera aussi peu que l'on voudra de l'ordonnée de la courbe qui a pour équation

$$y = 2x \pm x\sqrt{-\frac{2^7}{17}x};$$

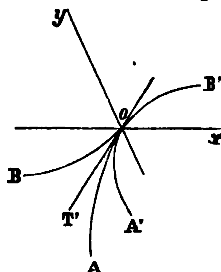


Fig. 132

par suite, de l'origine partent deux arcs de courbe $o$A, $o$B tangents à la droite $y - 2x = 0$, situés de part et d'autre de cette droite dans la région des abscisses négatives. L'origine est un point de rebroussement du premier genre.

Étudions maintenant les racines dont l'ordre est $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$; en posant $x = x'^3$, $\theta = zx'$, puis $z^3 = u$, on verra que, dans le voisinage de l'origine, l'ordonnée $y$ d'une seconde partie de la courbe différera aussi peu que l'on voudra de l'ordonnée de la courbe qui a pour équation

$$y = 2x - x\sqrt[3]{17x};$$

de l'origine partent donc deux nouveaux arcs de courbe $oA'$, $oB'$ tangents à la droite $y - 2x = 0$ et concaves vers les ordonnées négatives.

Il est facile de voir que l'arc $oA$ est situé entre la tangente $oT'$ et l'arc $oA'$.

**Exemple V.** — Soit la courbe qui a pour équation

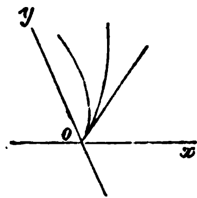



Fig. 143.

$$(y-x)^2 - 2(y-x)x^2 + x^4 - x^5 - y^6 = 0\,;$$

en posant $y = tx$, on obtient l'équation

$$(t-1)^2 - 2(t-1)x + x^2 - x^3 - t^6x^4 = 0,$$

qui, pour $x = 0$, admet la racine double $t = 1$; nous sommes donc conduits à poser $t = 1 + \theta$, ce qui donne l'équation

$$\theta^2 - 2\theta x + x^2 - x^3 - (1+\theta)^6x^4 = 0,$$

dont il faut séparer les racines infiniment petites.

En appliquant la méthode de M. Puiseux, on trouve que l'ordre de ces racines a pour expression $\frac{p}{q} = 1$ ; on doit donc poser

$$\theta = zx,$$

ce qui donne l'équation

$$(11) \qquad z^2 - 2z + 1 - x - (1+zx)^6x^2 = 0,$$

après qu'on a divisé les deux membres par $x^2$. Quand $x$ tend vers zéro, les valeurs de $z$ tendent vers les racines de l'équation

$$z^2 - 2z + 1 = 0,$$

laquelle admet la racine double $z = 1$. Les racines infiniment petites n'étant pas séparées, nous poserons $z - 1 = \theta'$, et l'équation (11) deviendra

$$\theta'^2 - x - (1 + x + \theta'x)^6x^2 = 0.$$

On trouvera que les racines infiniment petites de cette équation sont de l'ordre $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$, et, en posant $x = x'^2$, $\theta' = z'x'$, on verra que les valeurs de $z'$ sont infiniment voisines de $\pm 1$.

En résumé, dans le voisinage de l'origine, l'ordonnée $y$ de la courbe différera aussi peu que l'on voudra de l'ordonnée de la courbe, qui a pour équation

$$y = x + x^2 \pm x^2\sqrt{x}.$$

L'origine est un point de rebroussement du second genre.

## POINT D'ARRÊT. POINT ANGULEUX.

**161.** Outre les points singuliers que nous venons d'étudier, on peut encore en rencontrer deux autres, mais seulement dans les courbes *transcendantes*.

**Point d'arrêt.** — *On appelle point d'arrêt un point où s'arrête une branche unique de courbe.*

Dans ce cas, la circonférence d'un cercle de rayon infiniment petit, décrit du point considéré comme centre, ne rencontre la courbe qu'en un *seul* point.

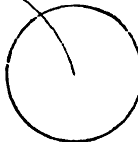


Fig. 134.

Soit, par exemple, la courbe qui a pour équation

$$y = e^{\frac{1}{x}}.$$

Donnons d'abord à $x$ des valeurs positives, et soit $\varepsilon$ une quantité positive aussi petite que l'on voudra; quand $x$ varie de $+\varepsilon$ à $+\infty$, l'ordonnée $y$ décroît de $+\infty$ à l'unité, et l'on obtient la branche de courbe BA asymptote à l'axe des $y$ et à la droite D qui a pour équation $y = 1$.

Donnons maintenant à $x$ des valeurs négatives, et, pour plus de facilité, changeons $x$ en $-x$, ce qui donne l'équation

$$y = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}.$$

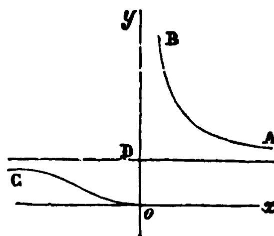



Fig. 135

Quand $x$ varie de $+\varepsilon$ à $+\infty$, l'ordonnée $y$ croît de *zéro* à l'*unité;* on a d'ailleurs

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{xe^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{x + 1 + \frac{1}{2x} + \cdots};$$

donc, quand $x$ tend vers zéro, le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers zéro, et l'on obtient une seconde branche $o$C, touchant l'axe des $x$ à l'origine et asymptote à la droite D du côté des abscisses négatives ; l'origine est un point *d'arrêt.*

**Remarque.** — La fonction $e^{\frac{1}{x}}$ est discontinue pour $x=0$, car elle passe brusquement de $+\infty$ à *zéro,* quand $x$ varie de $+\varepsilon$ à $-\varepsilon$.

**Point anguleux.** — *On appelle point anguleux un point* A *où s'arrêtent deux branches de courbe n'ayant pas en ce point la même tangente.*

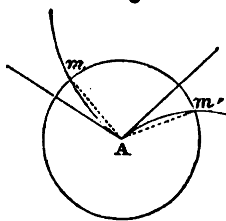


Fig. 136.

Dans ce cas, la circonférence d'un cercle de rayon infiniment petit, décrit du point A comme centre, rencontre la courbe en des points $m$, $m'$, qui sont vus du point A sous un angle qui n'est ni infiniment petit ni infiniment voisin de 180°.

Soit, par exemple, la courbe qui a pour équation

$$y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

Donnons d'abord à $x$ des valeurs positives, et soit $\varepsilon$ une quantité positive aussi petite que l'on voudra; quand $x$ varie de $+\varepsilon$ à $+\infty$, l'ordonnée $y$ croît de 0 à $+\infty$ ; de plus, quand $x$ tend vers zéro, le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers zéro ; on obtient donc une branche de courbe $o$A, touchant l'axe des $x$ à l'origine et s'étendant à l'infini dans l'angle des coordonnées positives.

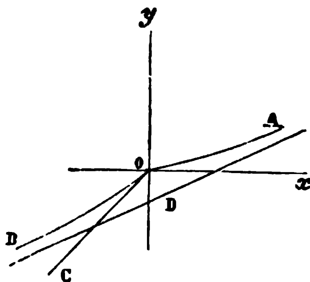


Fig. 137.

Donnons maintenant à $x$ des valeurs négatives, et, pour plus de facilité, changeons $x$ en $-x$, ce qui donne l'équation

$$y=\frac{-x}{1+\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}}.$$

Quand $x$ varie de $+\varepsilon$ à $+\infty$, l'ordonnée $y$ toujours négative décroît de 0 à $-\infty$ ; de plus, quand $x$ tend vers zéro, le rapport $\frac{y}{-x}$ tend vers l'*unité;* on obtient donc une seconde branche de courbe $o$B, touchant à l'origine la première bissectrice $o$C et s'étendant à l'infini dans l'angle des coordonnées négatives; l'origine est un point *anguleux.*

**Remarque.** — Il est facile de voir que la branche $o$B est située dans l'angle $x'o$C ; on démontrera plus loin que la courbe est asymptote à la droite D qui a pour équation

$$y=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}.$$

**162.** De l'étude d'une courbe algébrique dans le voisinage d'un de ses points, il résulte qu'une courbe algébrique n'a ni point d'*arrêt* ni point *anguleux;* il est d'ailleurs facile de donner de cette double proposition une démonstration directe.

**Théorème.** — *Une courbe algébrique n'a pas de point d'arrêt.*

Considérons sur une courbe algébrique un point quelconque $o$, que nous prendrons pour origine des coordonnées rectangulaires ; en groupant ensemble les termes de même parité par rapport à $y$, l'équation de la courbe prendra la forme

$$\varphi(x,y^2)+y\psi(x,y^2)=0.$$

L'équation d'un cercle ayant pour centre l'origine est

$$x^2+y^2=R^2;$$

entre les deux équations précédentes, éliminons $y$ ; nous aurons, pour déterminer les abscisses des points où la courbe est coupée par la circonférence du cercle, l'équation

$$(x^2-R^2)[\psi(x,R^2-x^2)]^2+[\varphi(x,R^2-x^2)]^2=0.$$

Cette équation est de degré pair par rapport à $x$, quelque petit que soit R ; par suite, le nombre de ses racines réelles est pair, et la circonférence d'un cercle de rayon infiniment petit décrit du point $o$ comme centre ne saurait rencontrer la courbe en un *seul* point.

**Théorème.** — *Une courbe algébrique n'a pas de point anguleux.*

Ce second théorème est une conséquence du précédent. Supposons en effet qu'une courbe algébrique C ayant pour équation

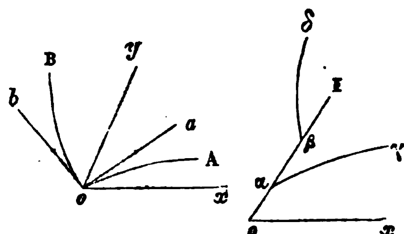


Fig. 138.

$$(12) \qquad f(x,y)=0$$

admette un point anguleux $o$, que nous prendrons pour origine des coordonnées; soient $o$A, $o$B les deux branches de courbe qui s'arrêtent à l'origine et touchent en ce point deux droites différentes $oa$, $ob$. Le coefficient angulaire I de la tangente en un point quelconque de la courbe C sera donné par l'équation

$$(13) \qquad f'_x + \mathrm{I} f'_y = 0;$$

en éliminant $y$ entre les équations (12) et (13), on obtiendra une équation *algébrique*

$$\varphi(x,\mathrm{I})=0,$$

qui, si l'on regarde I comme l'ordonnée et $x$ comme l'abscisse d'un point du plan, représentera une courbe C'. Quand le point M de la courbe C parcourt l'arc A$o$, le coefficient angulaire I de la tangente au point M varie d'une manière continue, et l'on obtient pour la courbe C' un arc $\gamma\alpha$ rencontrant l'axe des ordonnées $o$I, en un point $\alpha$, ayant pour ordonnée le coefficient angulaire $m$ de la tangente $oa$. Quand le point M parcourt l'arc $o$B de la courbe C, le coefficient angulaire I de la tangente passe brusquement de la valeur $m$ à une autre valeur $m'$, puis il varie d'une manière continue; on obtient ainsi pour la courbe C' un arc $\beta\delta$ coupant l'axe $o$I en un point $\beta$ ayant $m'$ pour ordonnée.

On voit que, si la courbe algébrique C avait un point anguleux, la courbe C', qui est également algébrique, aurait deux points d'arrêt, ce qui est impossible.

---

# CHAPITRE V

## ASYMPTOTES.

**163. Points à l'infini.** — Lorsqu'on coupe une courbe algébrique d'ordre $m$ par une droite *quelconque*, l'équation aux abscisses des points d'intersection est du degré $m$ ; il peut arriver que, pour certaines positions de la sécante, cette équation s'abaisse au degré $m-p$; dans ce cas, la droite ne rencontre plus en réalité la courbe qu'en $m-p$ points, mais on *convient* de dire qu'elle la rencontre en $m$ points dont $p$ se sont éloignés à l'infini.

Il est facile de faire comprendre comment on a été conduit à cette *convention*.

Soit $y=ax+b$ l'équation de la droite particulière D qui ne rencontre en réalité la courbe qu'en $m-p$ points ; considérons une droite mobile D' ayant même ordonnée à l'origine que la droite D, son équation sera

$$y=\alpha x+b.$$

Représentons par

$$(1) \qquad A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m=0$$

l'équation aux abscisses des points d'intersection de la droite D' avec la courbe ; les coefficients $A_i$ sont des fonctions entières de la varible $\alpha$; donc, si l'on fait varier $\alpha$ d'une manière continue, les inverses des racines de l'équation (1) varieront d'une manière continue. Pour $\alpha=a$ l'équation aux inverses des racines a $p$ racines nulles, puisque les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_{p-1}$ s'annulent par hypothèse; donc, pour une valeur de $\alpha$ infiniment voisine de $a$, cette équation aura $p$ racines infiniment voisines de zéro ; il en résulte que, dans les mêmes conditions, l'équation (1) aura $p$ racines dont le module sera *infiniment grand*.

Telles sont les considérations par lesquelles on a été conduit à regarder la droite D comme coupant la courbe en $m$ points dont $p$ sont rejetés à l'infini.

**Définition.** — *On appelle asymptote d'une branche de courbe infinie une droite telle que la distance d'un point de la courbe à cette droite tend vers zéro quand le point s'éloigne à l'infini sur la courbe.*

Dans la recherche des asymptotes, nous distinguerons deux cas.

### Asymptotes parallèles à l'axe des $y$.

**164.** Soit $x = a$ l'équation d'une droite A parallèle à l'axe des $y$ et asymptote à une branche de courbe C ; la distance MD d'un point $M(x, y)$ de la courbe C à la droite A, a pour expression

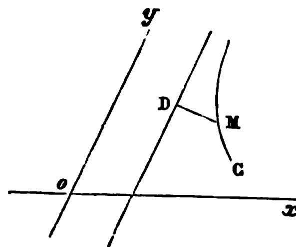


Fig. 139.

(2) $$MD = \pm (x - a) \sin\theta,$$

en appelant $\theta$ l'angle des axes de coordonnées (49).

Par définition, MD tend vers zéro quand le point M s'éloigne à l'infini, c'est-à-dire quand $y$ devient infini ; l'égalité (2) montre qu'en même temps l'abscisse $x$ tend vers $a$.

Réciproquement, quand $x$ tend vers $a$, la distance MD tend vers zéro et l'ordonnée $y$ devient infinie : de là résulte la règle suivante :

**Règle.** — *Pour avoir les asymptotes parallèles à l'axe des $y$, on cherche les valeurs finies de $x$, qui rendent $y$ infini.*

Lorsque l'équation de la courbe est résolue par rapport à $y$, c'est-à-dire de la forme

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

on aura les asymptotes parallèles à l'axe des $y$ en résolvant l'équation $\varphi(x) = 0$.

Par exemple, la courbe représentée par l'équation

$$y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

admet une infinité d'asymptotes parallèles à l'axe des $y$ ; on

obtiendra leurs équations en remplaçant $k$ par un nombre entier quelconque dans l'équation

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Quand l'équation de la courbe est algébrique et mise sous forme entière, on procède de la manière suivante:

Ordonnons l'équation de la courbe par rapport aux puissances *décroissantes* de $y$, elle prendra la forme

$$(3) \qquad y^p\varphi_0(x) + y^{p-1}\varphi_1(x) + y^{p-2}\varphi_2(x) + \ldots = 0,$$

$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ désignant des fonctions entières de $x$ dont les degrés sont au plus égaux à $m-p$, $m-p+1$, $m-p+2, \ldots$ si la courbe est d'ordre $m$.

L'équation aux inverses des racines de l'équation (3) est

$$(3') \qquad \varphi_0(x) + \frac{1}{y}\varphi_1(x) + \frac{1}{y^2}\varphi_2(x) + \ldots = 0;$$

le problème revient à chercher les valeurs finies de $x$ pour lesquelles l'équation (3') a *au moins* une racine nulle; ces valeurs seront donc les racines de l'équation $\varphi_0(x) = 0$.

**Règle.** — *Quand l'équation d'une courbe algébrique est mise sous forme entière, on obtient les asymptotes parallèles à l'axe des y, en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de l'ordonnée.*

**Discussion.** — Soit $a$ une racine réelle de l'équation $\varphi_0(x) = 0$; quand $x$ tend vers $a$, une au moins des racines de l'équation (3') tend vers zéro, et par suite une au moins des racines de l'équation (3) devient infinie. Si la racine qui devient infinie est réelle, ce qui aura toujours lieu quand elle est simple, la droite $x = a$ sera *réellement* asymptote à une branche de courbe; dans le cas contraire, cette droite ne sera asymptote à aucune branche réelle.

Pour déterminer le nombre des branches réelles asymptotes à la droite considérée, nous poserons

$$x = a + x' \qquad \frac{1}{y} = y',$$

la nouvelle variable $y'$ tendant vers zéro quand $x'$ tend vers zéro;

l'équation (3') prendra alors la forme suivante :

$$\Sigma A x'^{\beta} y'^{\alpha} = 0,$$

et nous serons ramenés à étudier les racines infiniment petites d'une équation (158).

Avant de donner un exemple, nous remarquerons qu'en reprenant les raisonnements qui ont conduit à la détermination des asymptotes parallèles à l'axe des $y$, on établira la règle suivante:

**Règle.** — ***Quand l'équation d'une courbe algébrique est mise sous forme entière, on obtient les asymptotes parallèles à l'axe des $x$ en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de l'abscisse.***

**165. Exemple.** — Soit la courbe qui a pour équation

$$(4) \qquad (x-1)^2 y^4 + (x-1) y^3 - x^2 = 0.$$

Elle admet d'abord comme asymptote la droite A parallèle à l'axe des $y$ et qui a pour équation $x = 1$ ; de plus, quand $x$ tend vers l'unité, *quatre* valeurs de $y$ deviennent infinies ; on ne voit donc pas immédiatement si, parmi ces valeurs, il y en a qui sont réelles.

Pour lever le doute, posons

$$x = 1 + x' \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{y'};$$

l'équation (4) devient

$$x'^2 + x'y' - (1 + x')^2 y'^4 = 0,$$

et l'on est ramené à séparer les racines infiniment petites de cette nouvelle équation.

En appliquant la méthode de M. Puiseux, on trouve que ces racines forment deux groupes, l'ordre des racines de ces groupes étant respectivement $1$ et $\frac{1}{3}$.

Pour séparer les racines du premier groupe, nous devons poser $y' = ux'$, ce qui donne l'équation

$$1 + u - (1 + x')^2 u^4 x'^2 = 0,$$

qui, pour $x' = 0$, se réduit à $u + 1 = 0$; les valeurs infiniment grandes de l'ordonnée $y$ différeront donc aussi peu que l'on voudra des ordonnées de la courbe, qui a pour équation

$$y = -\frac{1}{x-1};$$

il en résulte que la courbe proposée a déjà deux branches *réelles* C, C′ asymptotes à la droite A de part et d'autre de cette droite.

Pour séparer les racines du second groupe, nous devons poser

$$x' = x_1^3 \quad \text{et} \quad y' = u x_1,$$

ce qui donne l'équation

$$x_1^2 + u - \left(1 + x_1^3\right)^2 u^4 = 0,$$

qui, pour $x_1 = 0$, se réduit à $u^4 - u = 0$; on doit prendre seulement les racines différentes de zéro, c'est-à-dire les racines de l'équation $u^3 - 1 = 0$.

Cette équation a deux racines imaginaires auxquelles correspondent des branches imaginaires de la courbe proposée : elle a, en outre, une racine réelle $u = 1$; donc la courbe proposée a encore des branches réelles asymptotes à la droite A, et les valeurs infiniment grandes de leurs ordonnées différeront aussi peu que l'on voudra des ordonnées de la courbe, qui a pour équation

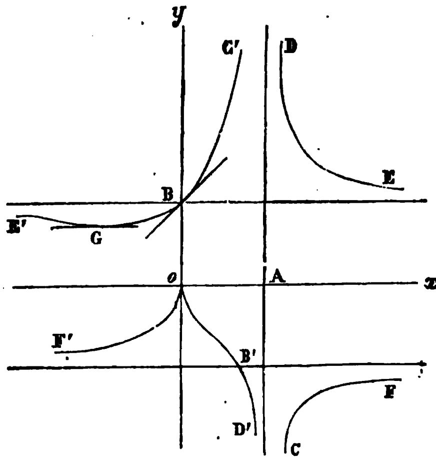


Fig. 140.

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x - 1}}.$$

Ces deux nouvelles branches réelles sont indiquées sur la figure par les lettres D et D′.

L'équation (4) ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de $x$ prend la forme

$$(4') \qquad (y^4 - 1)x^2 + y^3(1 - 2y)x + y^3(y - 1) = 0;$$

on voit que la courbe admet encore pour asymptotes les droites B et B′ parallèles à l'axe des $y$ et qui ont pour équation $y = \pm 1$;

les branches correspondantes sont réelles; car, quand $y$ tend vers $\pm 1$, une seule valeur de $x$ devient infinie.

Pour reconnaître comment ces branches sont placées par rapport aux asymptotes, écrivons l'équation (4') de la manière suivante :

$$y^4 - 1 + \frac{1}{x}\left[y^3(1-2y) + \frac{y^3(y-1)}{x}\right] = 0;$$

on peut donner à $y$ des valeurs suffisamment voisines de $\pm 1$ pour que $x$ soit plus grand que toute quantité donnée, et par suite pour que, dans l'équation précédente, le coefficient de $\frac{1}{x}$ ait le signe de son premier terme; il résulte de là que les valeurs infiniment grandes de $x$ auront le signe de $-\frac{y^3(1-2y)}{y^4-1}$. Cela étant, on verra facilement que les branches E, E' asymptotes à la droite B et les branches F, F' asymptotes à la droite B' sont, par rapport à ces droites, situées comme l'indique la figure 140.

La courbe dont nous reprendrons plus loin l'étude a la forme indiquée sur la figure 140.

### Asymptotes non parallèles à l'axe des $y$.

**166.** Considérons une branche de courbe infinie C ayant une asymptote D non parallèle à l'axe des $y$; la droite D a une équation de la forme

$$y = cx + d,$$

et il s'agit de déterminer les coefficients $c$ et $d$.

Pour cela, prenons sur la branche C un point M($x$,$y$); sa distance MP à la droite D sera proportionnelle à la quantité $y - cx - d$, et l'on pourra poser

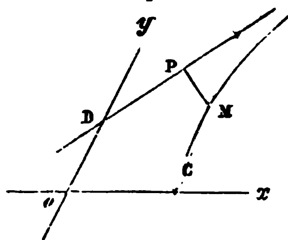


Fig. 141.

$$y - cx - d = \text{K.MP},$$

K étant une constante. Par hypothèse, la droite D est une asymptote; donc la fonction K.MP tend vers zéro quand $x$ et $y$ deviennent infinis; il résulte de là que la quantité K.MP est une fonction V de la variable $x$ qui tend vers zéro quand $x$ devient infini.

En résumé, la branche de courbe C que nous considérons pourra être représentée par une équation de la forme

$$(5) \qquad y = cx + d + V,$$

où V est une fonction de $x$ qui tend vers zéro quand $x$ devient infini.

Cela posé, de l'équation (5) on tire

$$c = \frac{y}{x} - \frac{d + V}{x};$$

quand $x$ devient infini, $\frac{d+V}{x}$ tend vers zéro; donc on a

$$c = \lim \frac{y}{x}$$

pour $x$ infini

**Règle I.** — *Le coefficient angulaire d'une asymptote non parallèle à l'axe des $y$ est égal à la limite du rapport $\frac{y}{x}$, quand $x$ devient infini.*

La même équation (5) donne

$$d = (y - cx) - V;$$

donc

$$d = \lim (y - cx)$$

pour $x$ infini.

**Règle II.** — *L'ordonnée à l'origine d'une asymptote non parallèle à l'axe des $y$ est égale à la limite de la différence $y - cx$, quand $x$ devient infini.*

On voit que la recherche des asymptotes non parallèles à l'axe des $y$ est ramenée à la détermination des deux quantités

$$c = \lim \frac{y}{x} \qquad d = \lim (y - cx).$$

**Exemple.** — Proposons-nous de trouver l'asymptote de la courbe qui a pour équation

$$y = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

et qui a déjà été étudiée (161).

On trouve facilement $c = \lim \frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ pour $x$ infini ; maintenant on a

$$d = \lim\left(y - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} \lim \frac{x - xe^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2} \lim \frac{-1 + \frac{\alpha}{x}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$$

pour $x$ infini ; donc $d = -\frac{1}{4}$, et la courbe a une asymptote représentée par l'équation

$$y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

## Asymptotes des courbes algébriques

**167.** Dans la recherche des asymptotes des courbes algébriques, nous distinguerons deux cas :

**Premier cas.** — *L'équation de la courbe est mise sous forme entière.* — Soit

$$f(x, y) = 0 \tag{6}$$

l'équation de la courbe mise sous forme entière ; pour déterminer les coefficients angulaires des asymptotes, nous poserons $y = ux$, ce qui donne l'équation

$$f(x, ux) = 0. \tag{7}$$

Il faut chercher la valeur que prend $u$ quand $x$ devient infini ; pour cela, on divisera les deux membres de l'équation (7) par la plus haute puissance de $x$, et l'on fera croître ensuite $x$ indéfiniment.

Soit $c$ une des valeurs de $u$ ainsi obtenue ; pour déterminer l'ordonnée à l'origine de l'asymptote correspondante, on posera

$$y = cx + \delta, \tag{8}$$

et, après avoir divisé par la plus haute puissance de $x$ les deux membres de l'équation

$$f(x, cx + \delta) = 0, \tag{9}$$

obtenue en portant cette valeur de $y$ dans l'équation (6), on fera croître $x$ indéfiniment.

Soit $d$ une des valeurs de $\delta$ ainsi déterminée ; je dis que *réciproquement* la droite qui a pour équation $y = cx + d$ est une asymptote.

En effet, l'équation (6) étant supposée du degré $m$, l'équation (9) donnera, pour $\delta$, $m$ valeurs.

$$\delta = V_1 \quad \delta = V_2 \quad \ldots \quad \delta = V_m ;$$

les quantités $V_i$ étant des fonctions de $x$.

En substituant ces valeurs dans l'équation (8), on obtiendra $m$ équations

$$y = cx + V_1, \quad y = cx + V_2, \quad \ldots, \quad y = cx + V_m,$$

qui représenteront chacune une *branche* de courbe ; l'ensemble de toutes ces branches forme la courbe considérée, puisqu'en éliminant $\delta$ entre les équations (8) et (9), on retrouve l'équation (6).

D'un autre côté, d'après la manière dont on a déterminé $d$, l'une *au moins* des quantités $V_i$ est de la forme $d + V$, la fonction V tendant vers zéro quand $x$ devient infini ; il résulte de là que l'une au moins des branches de la courbe a une équation de la forme

$$y = cx + d + V ;$$

cette branche est asymptote à la droite D représentée par l'équation $y = cx + d$, car la distance d'un de ses points à cette droite étant proportionnelle à V, tend vers zéro quand V devient infini.

**Remarque.** — Si, pour des valeurs de $x$ suffisamment grandes, la fonction V est réelle, la droite D sera réellement asymptote à une branche de courbe ; dans le cas contraire, cette droite ne sera asymptote à aucune branche réelle.

Pour déterminer le nombre des branches réelles asymptotes à la droite D, on posera $\delta = d + V$, l'équation (9) prendra alors la forme

$$\Sigma A x^\beta V^\alpha = 0, \tag{10}$$

et l'on sera encore ramené à étudier les racines infiniment petites de cette nouvelle équation.

La transformation que nous venons d'indiquer sera inutile dans le cas où, $x$ devenant infini, une *seule* valeur de $\delta$ tendra vers $d$, car cette valeur sera nécessairement réelle.

**168. Disposition relative de la branche de courbe et de l'asymptote.** — Une courbe algébrique ne peut pas osciller indéfiniment de part et d'autre de son asymptote; donc, pour des valeurs de $x$ suffisamment grandes, la fonction V conservera un signe constant, signe que fera connaître l'étude des racines infiniment petites de l'équation (10). La branche finira par être constamment située par rapport à la droite D dans la région des ordonnées positives si, pour des valeurs très grandes de $x$, la fonction V est positive; elle sera située dans la région des ordonnées négatives si la fonction V est négative.

**Exemple.** — Soit la courbe qui a pour équation

$$x(y-x)^3 - y(y-x)^2 - x(y-x) + x - 2 = 0.$$

En posant $y = ux$ et divisant ensuite les deux membres de l'équation par $x^4$, on obtient l'équation

$$(u-1)^3 - u(u-1)^2\frac{1}{x} - (u-1)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^4} = 0;$$

quand $x$ devient infini, $u$ tend vers une valeur $c$ racine de l'équation $(c-1)^3 = 0$; le coefficient angulaire de l'asymptote est donc égal à l'unité.

Pour avoir l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, nous poserons

$$y = x + \delta;$$

l'équation de la courbe devient, après qu'on a divisé par $x$,

$$(11) \qquad \delta^3 - \delta^2 - \delta + 1 - \frac{\delta^3 + 2}{x} = 0.$$

Si l'on fait croître $x$ indéfiniment, $\delta$ tend vers des valeurs $d$ racines de l'équation

$$d^3 - d^2 - d + 1 = 0.$$

Cette équation admet la racine simple $-1$, et la racine double $+1$; donc la courbe a pour asymptotes les droites D, D' qui ont pour équations

$$y = x - 1 \quad \text{et} \quad y = x + 1.$$

Les branches asymptotes à la première droite D sont réelles,

car, quand $x$ devient infini, une seule valeur de $\delta$ tend vers $-1$. Pour reconnaître la disposition relative de ces branches et de la droite D, posons $\delta = -1 + V$; l'équation (11) deviendra

$$(V-2)^2 V - \frac{(V-1)^3+2}{x} = 0;$$

on voit que, pour des valeurs de $x$ suffisamment grandes, V a le signe de $x$; donc du côté des abscisses positives la courbe finit par être constamment située, par rapport à la droite D, dans la région des ordonnées positives; du côté des abscisses négatives, elle finit par être constamment située par rapport à la droite D dans la région des ordonnées négatives.

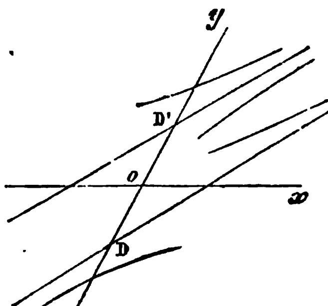


Fig. 142.

Les branches asymptotes à la seconde droite D' sont aussi réelles, car l'équation (11) montre que, quand $\delta$ tend vers l'unité, *une seule* valeur de $\frac{1}{x}$ tend vers zéro; d'un autre côté, l'équation (11), mise sous la forme suivante :

$$(\delta-1)^2(\delta+1) - \frac{\delta^3+2}{x} = 0,$$

montre encore que $\frac{1}{x}$ est positif pour $\delta = 1 \pm \varepsilon$, la quantité $\varepsilon$ étant infiniment petite. Il résulte de là que la courbe a deux branches réelles asymptotes à la droite D' du côté des abscisses positives et de part et d'autre de cette droite.

**Remarque.** — En posant $\delta = 1 + V$, $x = \frac{1}{x'}$ et étudiant les racines infiniment petites de l'équation

$$V^2(2+V) - [(1+V)^3+2]x' = 0$$

ainsi obtenue, on verra que, pour des valeurs de $x$ suffisamment grandes, les ordonnées des branches asymptotes à la droite D' diffèrent aussi peu que l'on voudra des ordonnées de la courbe représentées par l'équation

$$y = x + 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2x}}.$$

Elle montre bien que les deux branches asymptotes à la droite D' s'étendent à l'infini de part et d'autre de cette droite du côté des abscisses positives.

**169. Formules générales.** — Quand l'équation de la courbe est algébrique et de forme entière, on peut établir des formules générales pour la détermination des asymptotes non parallèles à l'axe des $y$.

En groupant ensemble les termes de même degré, cette équation prendra la forme

$$(12) \qquad \varphi_m(x,y)+\varphi_{m-1}(x,y)+\ldots+\varphi_0=0,$$

où $\varphi_p(x,y)$ représente un polynôme homogène du degré $p$.

Pour déterminer le coefficient angulaire de l'asymptote, posons $y=ux$ ; l'équation (12) divisée par $x^m$ deviendra

$$\varphi_m(1,u)+\frac{1}{x}\varphi_{m-1}(1,u)+\ldots+\frac{1}{x^m}\varphi_0=0\,;$$

comme nous cherchons seulement les asymptotes non parallèles à l'axe des $y$, nous devons supposer que, $x$ croissant indéfiniment, $u$ tend vers une valeur finie $c$; dès lors, tous les termes de l'équation précédente, sauf le premier, tendront vers zéro, et l'inconnue $c$ sera racine de l'équation

$$\varphi_m(1,c)=0.$$

**Règle.** — *On obtient l'équation qui donne les coefficients angulaires des asymptotes non parallèles à l'axe des y, en égalant à zéro l'ensemble des termes du degré le plus élevé de l'équation de la courbe, après y avoir remplacé x par 1 et y par c.*

Pour déterminer l'ordonnée à l'origine de l'asymptote dont le coefficient angulaire est $c$, nous poserons

$$y=cx+\delta\,;$$

le terme général de l'équation (12) deviendra $\varphi_p(x,cx+\delta)$.

Cette quantité est la valeur que prend $\varphi_p(x,cx)$, quand, *$x$ restant constant*, $cx$ reçoit l'accroissement $\delta$ ; on a donc

$$\varphi_p(x,cx+\delta)=\varphi_p(x,cx)+\frac{\delta}{1}\varphi'_p(x,cx)+\frac{\delta^2}{2!}\varphi''_p(x,cx)+\ldots.$$

Dans le second membre de cette identité, les coefficients de

$$\frac{\delta}{1}, \quad \frac{\delta^2}{2!}, \quad \ldots$$

sont les dérivées partielles par rapport à $y$ de la fonction $\varphi_p(x,y)$, dans lesquelles on remplace ensuite $y$ par $cx$.

La fonction $\varphi_p(x,cx)$ étant homogène et de degré $p$, les dérivées dont nous venons de parler seront homogènes et respectivement des degrés $p-1$, $p-2$ ..., par suite on a

$$\varphi_p(x, cx+\delta) = x^p\varphi_p(1,c) + \frac{\delta}{1}x^{p-1}\varphi'_p(1,c) + \frac{\delta^2}{2!}x^{p-2}\varphi''_p(1,c) + \ldots$$

De ce qui précède il résulte que l'équation (12) ordonnée par rapport aux puissances décroissantes de $x$, après qu'on y a remplacé $y$ par $cx+\delta$ deviendra

$$(13) \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{\delta}{1}\varphi'_m(1,c) \\ +\varphi_{m-1}(1,c) \end{array}\right| x^{m-1} + \left.\begin{array}{l} \frac{\delta^2}{2!}\varphi''_m(1,c) \\ +\frac{\delta}{1}\varphi'_{m-1}(1,c) \\ +\varphi_{m-2}(1,c) \end{array}\right| x^{m-2} + \ldots = 0.$$

Cette nouvelle équation ne contient pas de terme du degré $m$, car le coefficient $\varphi_m(1,c)$ de $x^m$ est nul.

En divisant par $x^{m-1}$ les deux membres de l'équation (13), on obtient l'équation

$$(13') \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{\delta}{1}\varphi'_m(1,c) + \frac{\delta^2}{2!}\varphi''_m(1,c) \\ +\varphi_{m-1}(1,c) + \frac{\delta}{1}\varphi'_{m-1}(1,c) \\ \qquad\qquad + \varphi_{m-2}(1,c) \end{array}\right| \frac{1}{x} + \ldots = 0.$$

Supposons que, $x$ devenant infini, $\delta$ tende vers une valeur finie $d$; tous les termes de l'équation (13'), à partir du second, tendront vers zéro; donc $d$ sera racine de l'équation

$$(14) \qquad d\varphi'_m(1,c) + \varphi_{m-1}(1,c) = 0.$$

**Discussion.** — 1° $\varphi'_m(1,c) \gtrless 0$. — L'équation (14) donne pour $d$

une valeur unique et finie : la courbe a une seule asymptote de coefficient angulaire $c$.

2° $\varphi'_m(1,c)=0$ *et* $\varphi_{m-1}(1,c)\gtrless 0$. — Dans ce cas, quand $x$ devient infini, $\delta$ ne peut pas tendre vers une valeur finie, car l'équation (13') montre qu'on devrait avoir alors $\varphi_{m-1}(1,c)=0$ ; nous dirons que l'asymptote est rejetée à l'infini ou que la branche correspondante est parabolique.

3° $\varphi'_m(1,c)=0$ *et* $\varphi_{m-1}(1,c)=0$. — Dans cette hypothèse, le coefficient de $x^{m-1}$ dans l'équation (13) est nul, quel que soit $\delta$ ; en divisant les deux membres par $x^{m-2}$, on obtient l'équation

$$\frac{\delta^2}{2!}\varphi''_m(1,c)+\frac{\delta}{1}\varphi'_{m-1}(1,c)+\varphi_{m-2}(1,c)+\frac{A}{x}=0,$$

et l'on voit que si, $x$ devenant infini, $\delta$ tend vers une valeur finie $d$, cette valeur est racine de l'équation du second degré

$$\frac{d^2}{2!}\varphi''_m(1,c)+\frac{d}{1}\varphi'_{m-1}(1,c)+\varphi_{m-2}(1,c)=0 ;$$

la courbe a deux asymptotes parallèles entre elles.

En général, si l'équation (13) s'abaisse au degré $m-p$, la courbe a $p$ asymptotes parallèles entre elles, dont les ordonnées à l'origine sont les racines de l'équation

$$\frac{d^p}{p!}\varphi^{(p)}_m(1,c)+\frac{d^{p-1}}{(p-1)!}\varphi^{(p-1)}_{m-1}(1,c)+\ldots+\varphi_{m-p}(1,c)=0.$$

**Remarques.** — 1° On démontrera, comme au paragraphe 167, que les droites déterminées par les considérations précédentes sont bien des asymptotes.

2° Pour déterminer le nombre des branches *réelles* asymptotes à ces droites, on posera $\delta=d+V$, $x=\frac{1}{x'}$ dans l'équation (13), et l'on sera encore ramené à étudier les racines infiniment petites d'une équation de la forme

$$\Sigma A x'^{\beta} V^{\alpha}=0.$$

3° Pour qu'une courbe algébrique admette $p$ asymptotes parallèles, il *faut* que leur coefficient angulaire $c$ soit racine d'ordre $p$

de multiplicité de l'équation $\varphi_m(1, c) = 0$ ; il importe de remarquer que cette condition n'est pas *suffisante*.

**170. Deuxième cas.** — *L'équation de la courbe est résolue par rapport à y.* — Supposons d'abord que l'équation de la courbe soit de la forme

$$y = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

$f(x)$ étant un polynôme du degré $m + 1$ et $\varphi(x)$ un polynôme du degré $m$. En effectuant la division du numérateur par le dénominateur, on aura

$$y = cx + d + \frac{f_1(x)}{\varphi(x)};$$

le reste $f_1(x)$ est au plus du degré $m - 1$, par suite, la fraction $\frac{f_1(x)}{\varphi(x)}$ tend vers zéro quand $x$ devient infini, et la droite représentée par l'équation $y = cx + d$ est une asymptote.

**Remarque.** — Nous avons déjà appliqué cette méthode (99), en étudiant la courbe qui a pour équation

$$Ax^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Supposons, en second lieu, que l'ordonnée $y$ soit une fonction irrationnelle de l'abscisse ; l'équation de la courbe sera de la forme

$$(15) \qquad y = ax + b + \sqrt[m]{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots} + \sqrt[p]{b_0x^p + b_1x^{p-1} + \dots}.$$

Nous supposons que $y$ est réel quand $x$ devient infini, et nous nous proposons de trouver les asymptotes de la courbe.

**Première Méthode.** — On a, pour $x$ infini,

$$c = \lim \frac{y}{x} = a + \sqrt[m]{a_0} + \sqrt[p]{b_0};$$

on a ensuite

$$y - cx = b + \left[\sqrt[m]{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots} + \sqrt[p]{b_0x^p + b_1x^{p-1} + \dots} - x\sqrt[m]{a_0} - x\sqrt[p]{b_0}\right].$$

Quand $x$ devient infini, la quantité placée entre les accolades prend

la forme illusoire $\infty - \infty$ ; posons $x = \frac{1}{z}$, il en résultera

$$y - cx = b + \frac{\sqrt[m]{a_0 + a_1 z + \ldots} + \sqrt[p]{b_0 + b_1 z + \ldots} - \sqrt[m]{a_0} - \sqrt[p]{b_0}}{z};$$

la fraction placée dans le second membre de cette égalité prend, pour $z = 0$, la forme illusoire $\frac{0}{0}$ ; on aura sa valeur en appliquant la règle de L'Hôpital.

**Exemple.** — Soit la courbe qui a pour équation

$$y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 + 2x - 1} + \sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 - 6x - 1}.$$

Prenons d'abord le signe $+$ devant le premier radical, nous aurons

$$\frac{y}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 1}}{x} + \frac{\sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 - 6x - 1}}{x};$$

si l'on fait croître $x$ au delà de toutes limites par valeurs positives, il en résulte $c = 4$ ; si l'on fait croître $x$ au delà de toutes limites par valeurs négatives, il en résulte $c' = 2$.

Cherchons d'abord l'ordonnée à l'origine de l'asymptote qui correspond au coefficient angulaire $c = 4$ ; en posant $x = \frac{1}{z}$, on a

$$y - 4x = 1 + \frac{\sqrt{1 + 2z - z^2} + \sqrt[3]{8 + 12z - 6z^2 - z^3} - 3}{z}.$$

Si l'on fait tendre $z$ vers zéro, la règle de L'Hôpital donne

$$d = \lim(y - 4x) = 3,$$

et l'on obtient une première asymptote représentée par l'équation

$$y = 4x + 3.$$

Cherchons maintenant l'ordonnée à l'origine de l'asymptote qui correspond au coefficient angulaire $c' = 2$ ; en posant $x = -\frac{1}{z}$,

on a

$$y - 2x = 1 + \frac{\sqrt{1 - 2z - z^2} + \sqrt[3]{-8 + 12z + 6z^2 - z^3} + 1}{z}.$$

Si l'on fait tendre $z$ vers zéro par valeurs *positives*, la règle de L'Hôpital donne

$$d = \lim(y - 2x) = 1,$$

et l'on obtient une seconde asymptote représentée par l'équation $y = 2x + 1$.

En prenant le signe — devant le premier radical, on retrouve les mêmes asymptotes.

**Seconde Méthode.** — Cette seconde méthode repose sur le lemme suivant :

**Lemme.** — *Étant donnée une irrationnelle, on a identiquement*

$$\sqrt[m]{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots} = \alpha x + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \ldots + \frac{\alpha_{p-1}}{x^{p-1}} + \frac{\lambda}{x^p};$$

*les quantités $\alpha_i$ étant des constantes et $\lambda$ une fonction de $x$ qui reste finie quand $x$ devient infini.*

Extrayons la racine d'ordre $m$ du polynôme

$$A = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots,$$

en arrêtant les calculs quand nous aurons trouvé un terme de degré $p - 1$ par rapport à $\frac{1}{x}$ ; soient B cette racine et R le reste, nous aurons identiquement

$$A = B^m + R$$

avec

$$B = \alpha x + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \ldots + \frac{\alpha_{p-1}}{x^{p-1}}$$

$$R = x^{m-1}\left(\frac{\beta_0}{x^p} + \frac{\beta_1}{x^{p+1}} + \ldots\right)$$

et

$$\alpha = \sqrt[m]{a_0}.$$

Représentons par $\frac{\lambda}{x^p}$ la différence entre $\sqrt[m]{A}$ et B, nous aurons identiquement

$$\lambda = x^p(\sqrt[m]{A} - B);$$

si l'on multiplie et si l'on divise le second membre de cette identité par la quantité $\sqrt[m]{A^{m-1}} + B\sqrt[m]{A^{m-2}} + \ldots + B^{m-1}$, elle devient

$$\lambda = x^p \frac{A - B^m}{\sqrt[m]{A^{m-1}} + B\sqrt[m]{A^{m-2}} + \ldots + B^{m-1}};$$

ou encore

$$\lambda = \frac{Rx^p}{\sqrt[m]{A^{m-1}} + B\sqrt[m]{A^{m-2}} + \ldots + B^{m-1}}.$$

La *valeur principale* du numérateur de cette fraction est $\beta_0 x^{m-1}$, et celle du dénominateur $mx^{m-1}\sqrt[m]{a_0^{m-1}}$; donc, quand $x$ devient infini, $\lambda$ tend vers la valeur finie $\frac{\beta_0}{m\sqrt[m]{a_0^{m-1}}}$.

Nous allons maintenant démontrer que l'irrationnelle $\sqrt[m]{A}$ ne peut être mise sous la forme précédente que d'une seule manière.

Supposons, en effet, que l'on ait encore identiquement

$$\sqrt[m]{A} = \beta x + \beta_0 + \frac{\beta_1}{x} + \ldots + \frac{\beta_{p-1}}{x^{p-1}} + \frac{\mu}{x^p},$$

les quantités $\beta_i$ étant des constantes et $\mu$ une fonction de $x$ qui reste finie quand $x$ devient infini ; il en résultera l'identité

$$(\alpha - \beta)x + (\alpha_0 - \beta_0) + \frac{\alpha_1 - \beta_1}{x} + \ldots + \frac{\alpha_{p-1} - \beta_{p-1}}{x^{p-1}} + \frac{\lambda - \mu}{x^p} = 0.$$

En divisant par $x$ les deux membres de cette identité et faisant ensuite $x$ infini, on voit que $\alpha = \beta$ ; supprimons le terme $(\alpha - \beta)x$ dont le coefficient est nul, et faisons encore $x$ infini, nous verrons que $\alpha_0 = \beta_0$. Supprimons maintenant les deux premiers termes de la même identité ; multiplions les deux membres par $x$ et faisons toujours $x$ infini, nous en conclurons que $\alpha_1 = \beta_1$.

En continuant de la même manière, on verra que les constantes $\alpha_i$ et $\beta_i$ sont respectivement égales; donc les fonctions $\lambda$ et $\mu$ sont identiques.

En appliquant ce lemme à l'équation (15), on la mettra sous la forme

$$y = cx + d + \frac{\lambda}{x^p},$$

la fonction $\lambda$ restant finie quand $x$ devient infini : on connaîtra donc l'asymptote, et l'on pourra déterminer la position relative de la courbe et de cette droite.

**Remarque.** — Si l'on veut trouver seulement l'équation de l'asymptote, il suffira, dans l'équation (15), de calculer les deux premiers termes de chaque racine. Si l'on veut en outre déterminer la position relative de la courbe et de l'asymptote, il faudra calculer, dans chaque racine, assez de termes pour connaître, dans l'expression de $y$, le terme de degré le moins élevé en $\frac{1}{x}$.

**Exemple.** — Reprenons l'équation

$$y = x + 1 \pm \sqrt{x^2 + 2x - 1} + \sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 - 6x - 1},$$

on a

$$\sqrt{x^2 + 2x - 1} = x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{\mu}{x^3}$$

$$\sqrt[3]{8x^3 + 12x^2 - 6x - 1} = 2x + 1 - \frac{1}{x} + \frac{5}{6x^2} + \frac{\mu'}{x^3};$$

donc

$$y = 4x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{\lambda}{x^2},$$

et

$$y = 2x + 1 - \frac{1}{6x^2} + \frac{\lambda'}{x^3}.$$

La droite D, représentée par l'équation $y = 4x + 3$, est une asymptote par rapport à laquelle la courbe est située dans la région des ordonnées négatives du côté des abscisses positives, et dans la région des ordonnées positives du côté des abscisses négatives.

La droite D' représentée par l'équation $y = 2x + 1$ est une

seconde asymptote par rapport à laquelle la courbe est située dans la région des ordonnées négatives, du côté des abscisses positives et des abscisses négatives.

## Propriétés générales des asymptotes des courbes algébriques.

**171. Théorème I.** — *Une courbe algébrique d'ordre m a au plus m asymptotes.*

Le nombre des directions asymptotiques étant limité, nous pouvons rapporter la courbe à des axes tels, que l'axe des $y$ ne soit pas parallèle à une asymptote; d'un autre côté, nous avons vu que, si la courbe a $p$ asymptotes parallèles, l'équation

$$\varphi_m(1,c)=0$$

a nécessairement une racine d'ordre $p$. De ce qui précède, il résulte que le nombre des asymptotes est au plus égal au nombre des racines de l'équation $\varphi_m(1,c)=0$, chaque racine étant prise avec son degré de multiplicité; le nombre des asymptotes ne peut donc pas surpasser $m$.

**Théorème II.** — *Le nombre des branches réelles d'une courbe algébrique asymptotes à une droite est pair.*

Prenons l'asymptote pour axe des $y$, et soit alors

$$f(x,y)=0$$

l'équation de la courbe. Posons $y=\frac{1}{y'}$, cette équation deviendra

$$f\left(x, \frac{1}{y'}\right)=0.$$

Puisque l'axe des $y$ est une asymptote, le premier membre de l'équation précédente mise sous forme entière contiendra $y'$ en facteur quand on y posera $x=0$; supposons que, dans cette hypothèse, ce premier membre soit divisible par $y'^p$; nous distinguerons deux cas :

1° *Le nombre p est pair.* — Quand on fait tendre $x$ vers zéro par valeurs soit *positives* soit *négatives*, un nombre pair de valeurs

réelles de $y'$ tendent vers zéro ; donc le nombre des branches réelles asymptotes à l'axe des $y$ du côté des abscisses, tant positives que négatives, est pair ; par suite, le nombre total des branches réelles asymptotes à cette droite est pair.

2° *Le nombre p est impair.* — On verra, de la même manière, que la courbe a un nombre impair de branches réelles asymptotes à l'axe des $y$ tant du côté des abscisses positives que du côté des abscisses négatives ; par suite, le nombre total des branches réelles asymptotes à cette droite est encore pair.

**Théorème III.** — *Quand une courbe algébrique a p asymptotes parallèles entre elles : 1° toute parallèle à ces asymptotes rencontre la courbe en $m-p$ points à distance finie ; 2° chacune de ces asymptotes la rencontre au plus en $m-p-1$ points à distance finie.*

En effet, soit $c$ le coefficient angulaire des asymptotes considérées ; si, dans l'équation de la courbe, on remplace $y$ par $cx+\delta$, on obtiendra une nouvelle équation du degré $m-p$ par rapport à $x$ (169) ; d'un autre côté, si l'on remplace ensuite $\delta$ par l'ordonnée à l'origine $d$ de l'une des asymptotes, le coefficient de $x^{m-p}$ dans cette équation s'annulera, et il *pourra* en être de même des coefficients de quelques-uns des termes suivants.

**Problème.** — *Exprimer qu'une droite est asymptote d'une courbe algébrique.*

Si une seconde asymptote n'est pas parallèle à la droite considérée, on écrira que cette droite rencontre la courbe en deux points rejetés à l'infini, ce qui donnera deux équations de condition.

Si la droite fait partie d'un faisceau de $p$ asymptotes parallèles, on écrira qu'elle rencontre la courbe en $p+1$ points rejetés à l'infini, ce qui donnera $p+1$ équations de condition.

**Théorème IV.** — *Une asymptote d'une courbe algébrique est la limite d'une tangente dont le point de contact s'éloigne à l'infini*

Soit

$$\varphi_m(x,y)+z\varphi_{m-1}(x,y)+\ldots=0$$

l'équation de la courbe rendue homogène et où l'on a groupé ensemble les termes de même degré par rapport à $x$ et à $y$.

Nous représenterons par les symboles ${}_x\varphi'_p(x,y)$, ${}_y\varphi'_p(x,y)$ les dérivées partielles de la fonction $\varphi_p(x,y)$; l'équation de la tangente en un point M $(x,y)$ sera

$$\begin{aligned} &X[{}_x\varphi'_m(x,y)+{}_x\varphi'_{m-1}(x,y)+\ldots] \\ &\qquad +Y[{}_y\varphi'_m(x,y)+{}_y\varphi'_{m-1}(x,y)+\ldots]+\varphi_{m-1}(x,y)+\ldots=0, \end{aligned}$$

ou

$$X\left[{}_x\varphi'_m(1,u)+\frac{a}{x}\right]+Y\left[{}_y\varphi'_m(1,u)+\frac{b}{x}\right]+\varphi_{m-1}(1,u)+\frac{c}{x}=0,$$

en divisant les deux membres de l'équation par $x^{m-1}$ et posant $u=\frac{y}{x}$, les lettres $a$, $b$, $c$ représentent des fonctions entières de $u$ et de $\frac{1}{x}$ qui restent finies quand $x$ devient infini.

Si l'on fait croître $x$ indéfiniment, $u$ tend vers le coefficient angulaire $c$ d'une asymptote, et l'équation de la tangente devient

$$X\,{}_x\varphi'_m(1,c)+Y\,{}_y\varphi'_m(1,c)+\varphi_{m-1}(1,c)=0.$$

Dans l'identité

$$x\,{}_x\varphi'_m(x,y)+y\,{}_y\varphi'_m(x,y)\equiv m\varphi_m(x,y),$$

faisons $x=1$, $y=c$, et remarquons que $\varphi_m(1,c)$ est nul, nous aurons

$${}_x\varphi'_m(1,c)=-c\,{}_y\varphi'_m(1,c)=-c\varphi'_m(1,c),$$

en supprimant l'indice $y$ qui est devenu inutile.

L'équation de la tangente sera donc finalement

$$(Y-cX)\varphi'_m(1,c)+\varphi_{m-1}(1,c)=0;$$

donc cette tangente a pour limite une asymptote.

**Remarque.** — Le théorème précédent s'applique à une courbe *non algébrique*, pourvu que la tangente tende vers une position limite quand $x$ devient infini.

En effet, le coefficient angulaire $c$ de l'asymptote est la limite

du rapport $\frac{y}{x}$ pour $x$ infini ; or, ce rapport prend la forme illusoire $\frac{\infty}{\infty}$, et, en appliquant la règle de L'Hôpital, on voit qu'on devra faire $x$ infini dans la fonction $y'$.

Il résulte de là que, quand le point de contact s'éloigne à l'infini, la tangente devient parallèle à une asymptote.

En second lieu, l'ordonnée à l'origine de l'asymptote est la limite de la différence $\delta = y - cx$ pour $x$ infini. Pour déterminer cette limite, nous écrirons la quantité $\delta$ de la manière suivante :

$$\delta = \frac{\frac{y}{x} - c}{\frac{1}{x}};$$

le second membre, pour $x$ infini, prend la forme illusoire $\frac{0}{0}$ ; en appliquant la règle de L'Hôpital, on sera conduit à faire $x$ infini dans l'expression $y - xy'$, qui est justement celle de l'ordonnée à l'origine de la tangente au point $M(x, y)$.

Il résulte de là que, quand le point de contact s'éloigne à l'infini, l'ordonnée à l'origine de la tangente tend vers l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, dont le coefficient angulaire est $c$ ; la tangente a donc pour limite l'asymptote.

Le raisonnement précédent suppose essentiellement que, $x$ devenant infini, les quantités $y'$ et $y - xy'$ ont des limites ; il serait en défaut dans le cas contraire.

**Exemple.** — Soit la courbe qui a pour équation

$$y = \frac{\sin x}{x},$$

elle est évidemment asymptote à l'axe des $x$ ; mais cette droite ne peut pas être considérée comme la limite d'une tangente dont le point de contact s'éloigne à l'infini.

En effet, le coefficient angulaire d'une tangente a pour expression

$$y' = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2};$$

on voit qu'il tend vers zéro quand $x$ devient infini, et la tangente devient bien parallèle à l'asymptote.

Quant à l'ordonnée à l'origine de la tangente qui a pour expression

$$y - xy' = \frac{2\sin x}{x} - \cos x,$$

elle ne tend pas vers une limite quand $x$ devient infini, puisque le cosinus d'un arc infiniment grand n'est pas déterminé. Notre théorème n'est donc pas applicable à la courbe considérée.

## Asymptotes des courbes du second ordre.

**172. Premier cas.** — Supposons d'abord l'équation de la courbe de forme entière, elle sera

$$f(x,y) = Ax^2 + Cy^2 + 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Les coefficients angulaires des asymptotes sont racines de l'équation

$$(16) \qquad \varphi_2(1,c) = Cc^2 + 2Bc + A = 0;$$

nous distinguerons trois cas :

1° *La courbe est une ellipse.* — Les racines de l'équation (16) sont imaginaires et la courbe n'a pas d'asymptote réelle.

2° *La courbe est une hyperbole.* — L'équation (16) a ses racines réelles et distinctes auxquelles correspondent deux directions asymptotiques.

Les ordonnées à l'origine des asymptotes s'obtiendront en remplaçant $c$ par ces racines dans l'équation

$$(17) \qquad d\varphi'_2(1,c) + \varphi_1(1,c) = 0,$$

c'est-à-dire dans l'équation

$$(Cc + B)d + D + Ec = 0.$$

L'équation de l'une ou l'autre des asymptotes sera donc

$$(Cc + B)y - (Cc^2 + Bc)x + (D + Ec) = 0;$$

en remarquant que l'on a $Cc^2+Bc=-(Bc+A)$, on peut donner à cette équation la forme suivante :

$$(17') \qquad f'_x+cf'_y=0.$$

On voit que les asymptotes sont les diamètres conjugués des cordes ayant pour coefficient angulaire les racines de l'équation (16).

**Équation quadratique des asymptotes de l'hyperbole. —** On aura l'équation qui représente les deux asymptotes de l'hyperbole en éliminant $c$ entre les équations (16) et (17') ; ce qui donne l'équation

$$A(f'_y)^2-2Bf'_xf'_y+C(f'_x)^2=0.$$

On peut donner à l'équation qui représente les deux asymptotes de l'hyperbole une forme plus élégante en remarquant que ces droites sont les tangentes menées du centre à la courbe [(171), théor. IV].

L'équation des tangentes menées d'un point $P(x_0, y_0)$ à une courbe du second ordre est (148)

$$4f(x_0,y_0)\,f(x,y)=(xf'_{x_0}+yf'_{y_0}+zf'_{z_0})^2 ;$$

si le point P coïncide avec le centre de la courbe, on a

$$f'_{x_0}=0 \quad f'_{y_0}=0 \quad f'_{z_0}=2f(x_0,y_0)=-2\frac{\Delta}{\delta};$$

donc les deux asymptotes seront représentées par l'équation

$$f(x,y)+\frac{\Delta}{\delta}=0.$$

3° *La courbe est une parabole.* — L'équation (16) a une racine double $c=-\frac{B}{C}=-\frac{A}{B}$ qui annule $\varphi'_2(1,c)$, mais n'annule pas $\varphi_1(1,c)$ ; car, si elle annulait $\varphi_1(1,c)$, on aurait à la fois

$$c=-\frac{A}{B}=-\frac{B}{C}=-\frac{D}{E},$$

et la courbe se composerait de deux droites parallèles.

Quand $\delta$ est positif, l'équation (17) nous a donné pour $d$ deux valeurs finies; si l'on fait tendre $\delta$ vers zéro, ces deux valeurs de $d$ deviennent infinies, puisque dans la fonction $-\frac{\varphi_1(1,c)}{\varphi'_2(1,c)}$ le dénominateur seul tend vers zéro; on est ainsi conduit à regarder la parabole comme ayant deux asymptotes rejetées à l'infini.

4° *La courbe se compose de deux droites parallèles.* — On a alors

$$\frac{A}{B}=\frac{B}{C}=\frac{D}{E},$$

et l'équation (17) se réduit à une identité quand on y remplace $c$ par $-\frac{B}{C}$; les ordonnées à l'origine des asymptotes sont déterminées par l'équation

$$\frac{d^2}{2}\varphi''_2(1,c)+d\varphi'_1(1,c)+\varphi_0(1,c)=0,$$

c'est-à-dire par l'équation

$$Cd^2+2Ed+F=0.$$

La courbe a deux asymptotes parallèles entre elles et confondues avec les droites qui la composent.

**Deuxième cas.** — Supposons maintenant l'équation de la courbe résolue par rapport à $y$; il n'y aura lieu de chercher les asymptotes que si la courbe est une hyperbole, son équation sera donc de la forme

$$(18) \qquad y=ax+b\pm\sqrt{\mu^2x^2+2px+q}.$$

Prenons d'abord le signe $+$ devant le radical, nous aurons

$$\frac{y}{x}=a+\frac{b}{x}+\frac{\sqrt{\mu^2x^2+2px+q}}{x};$$

on trouvera $c=a+\mu$ si l'on fait croître $x$ au delà de toutes limites par valeurs positives, et $c'=a-\mu$ si l'on fait croître $x$ au delà de toutes limites par valeurs négatives; $\mu$ désigne une quantité positive.

Cherchons l'ordonnée à l'origine de l'asymptote qui correspond au coefficient angulaire $c = a + \mu$ ; on a

$$\begin{aligned} y - cx &= b + \sqrt{\mu^2x^2 + 2px + q} - \mu x \\ &= b + \frac{2px + q}{\mu x + \sqrt{\mu^2x^2 + 2px + q}}, \end{aligned}$$

et, en faisant croître $x$ au delà de toutes limites par valeurs *positives*, on trouve $d = b + \frac{p}{\mu}\cdot$ On obtient ainsi une première asymptote D ayant pour équation

$$y = ax + b + \left(\mu x + \frac{p}{\mu}\right)\cdot$$

Cherchons maintenant l'ordonnée à l'origine de l'asymptote qui correspond au coefficient angulaire $c' = a - \mu$ ; on a

$$\begin{aligned} y - c'x &= b + \sqrt{\mu^2x^2 + 2px + q} + \mu x \\ &= b + \frac{2px + q}{\sqrt{\mu^2x^2 + 2px + q} - \mu x}, \end{aligned}$$

et, en faisant croître $x$ au delà de toutes limites par valeurs *négatives*, on trouve $d' = b - \frac{p}{\mu}\cdot$ On obtient ainsi une seconde asymptote D' ayant pour équation

$$y = ax + b - \left(\mu x + \frac{p}{\mu}\right)\cdot$$

En prenant le radical avec le signe —, on trouve comme asymptote la droite D si $x$ croît au delà de toutes limites par valeurs *négatives*, et la droite D' si $x$ croît au delà de toutes limites par valeurs *positives*.

En résumé, C désignant la branche de courbe représentée par l'équation (18), quand on prend le signe + devant le radical et C' la branche de courbe représentée par la même équation quand on prend le signe — devant le radical, la branche C sera asymptote à la droite D du côté des abscisses positives et à la droite D' du côté des abscisses négatives. L'inverse a lieu pour la branche C'.

## Étude des points à l'infini.

173. On peut ramener l'étude des points à l'infini d'une courbe C à celle des points où une autre courbe C' rencontre l'axe des $y$.

Soient $x$ et $y$ les coordonnées d'un point quelconque M de la courbe C ; à ce point M faisons correspondre un point M' dont les coordonnées $x'$ et $y'$ sont définies par les relations

$$x' = \frac{1}{x} \quad y' = \frac{y}{x},$$

nous obtiendrons une courbe C' qui est dite la transformée de la courbe C.

Réciproquement, C est la transformée de C' ; car des formules précédentes on déduit

$$x = \frac{1}{x'} \quad y = \frac{y'}{x'}.$$

On vérifie sans difficulté les deux théorèmes suivants :

**Théorème I.** — 1° *La transformée d'une droite est une droite ; 2° chaque droite a pour coefficient angulaire l'ordonnée à l'origine de sa transformée.*

**Théorème II.** — *La transformée d'une courbe d'ordre m est une courbe du même ordre.*

Nous établirons encore les propriétés suivantes :

**Théorème III.** — *La tangente au point* M *de la courbe* C *a pour transformée la tangente au point* M' *de la courbe* C'.

En effet, à une corde $MM_1$ de la courbe C correspond une corde $M'M'_1$ de la courbe C', et quand le point $M_1$ vient coïncider avec M, son homologue $M'_1$ coïncide avec M'.

**Théorème IV.** — *Les asymptotes non parallèles à l'axe des y de la courbe* C *ont pour transformées les tangentes à la courbe* C', *aux points où elle rencontre l'axe des y.*

Soit, en effet, A une branche de la courbe C, asymptote à la droite T ; quand le point M s'éloigne à l'infini sur la branche A, $x'$ tend vers zéro et $y'$ vers le coefficient angulaire $c$ de l'asymp-

tote T ; donc le point M' homologue de M tendra vers un point A' situé sur l'axe des $y$ et ayant pour ordonnée $c$.

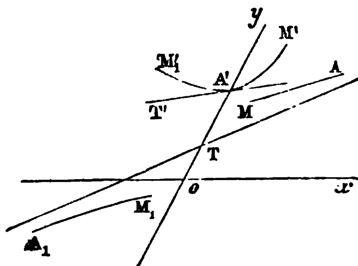


Fig. 143.

Appelons $d$ le coefficient angulaire de la tangente A'T' au point A' de la courbe C', l'équation de cette droite sera

$$y' = dx' + c,$$

et celle de sa transformée

$$y = cx + d;$$

je dis que cette transformée est l'asymptote T. En effet, le coefficient angulaire $\frac{y'-c}{x'}$ de la sécante A'M' ayant $d$ pour limite, on peut poser $\frac{y'-c}{x'} = d + V$, V tendant vers zéro avec $x'$ ; la branche A'M' de la courbe C' est donc représentée par l'équation $y' = c + dx' + Vx'$, et sa transformée A par l'équation

$$y = cx + d + V,$$

V tendant vers zéro quand $x$ devient infini.

On voit que la branche A de la courbe C a pour asymptote la transformée de la tangente A'T'.

Ce théorème ramène l'étude des points à l'infini de la courbe C à celle des points où sa transformée C' rencontre l'axe des $y$.

**Discussion.** — 1° *Le point* A' *est un point simple ordinaire.* — Pour fixer les idées, supposons qu'au point A' la courbe C' soit concave vers les ordonnées positives. Pour des valeurs de $x'$ suffisamment petites, positives ou négatives, la fonction $Vx'$ sera positive ; donc, pour des valeurs positives de $x$ suffisamment grandes, la fonction V sera positive, et, pour des valeurs négatives de $x$ suffisamment grandes, elle sera négative. Il résulte de là que la transformée AM de l'arc A'M' sera asymptote à la droite T du côté des abscisses positives, et située par rapport à cette droite dans la région des ordonnées positives ; la transformée $A_1M_1$ de l'arc $A'M'_1$ sera asymptote à la droite T du côté des abscisses négatives et située par rapport à cette droite dans la région des ordonnées négatives (*fig.* 143).

2° *Le point A' est un point d'inflexion.* — Les deux branches AM, $A_1M_1$ sont asymptotes à la droite T, l'une du côté des abscisses positives, l'autre du côté des abscisses négatives, mais situées toutes les deux d'un même côté de l'asymptote (*fig.* 144).

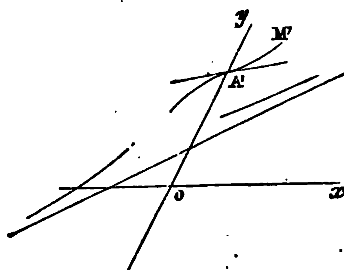


Fig. 144.

On dit que la courbe C a un point d'inflexion à l'infini.

3° *Le point A' est un point multiple d'ordre p.* — La courbe C a *p* asymptotes parallèles entre elles et autant de branches réelles correspondantes qu'il y a de branches réelles de la courbe C' passant par le point A'.

On dit que la courbe C a un point multiple d'ordre *p* à l'infini.

4° *Le point A' est un point de rebroussement.* — La courbe C a deux asymptotes confondues auxquelles correspondent deux branches s'étendant à l'infini, toutes les deux dans le sens des abscisses positives, ou toutes les deux dans le sens des abscisses négatives.

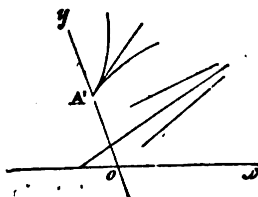


Fig. 145.

Si, au point A', le rebroussement est du premier genre, les deux branches infinies de la courbe C sont de part et d'autre de l'asymptote (*fig.* 145).

On dit que la courbe a un point de rebroussement du premier genre à l'infini.

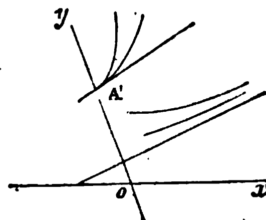


Fig. 146.

Si, au point A', le rebroussement est du second genre, les deux branches infinies de la courbe C sont d'un même côté de l'asymptote (*fig.* 146).

On dit que la courbe a un point de rebroussement du second genre à l'infini.

5° *Le point A' est un point isolé.* — Si les deux tangentes en ce point sont imaginaires, la courbe C a deux asymptotes imaginaires ; si ces deux tangentes sont réelles et confondues, la courbe C a deux asymptotes réelles et confondues auxquelles correspondent deux branches imaginaires.

6° *La tangente au point* A′ *est l'axe des y.* — La courbe C a alors deux branches infinies *paraboliques*, c'est-à-dire dont les asymptotes sont rejetées à l'infini : ces branches sont dirigées dans le même sens si le point A′ est un point simple ordinaire; elles sont dirigées en sens contraire s'il y a inflexion au point A′.

**Propriété des asymptotes.** — La méthode de transformation que nous venons d'exposer met aussi en évidence les propriétés générales des asymptotes.

1° *Une courbe algébrique d'ordre m a au plus m asymptotes.*

Car la transformée C′ rencontre l'axe des $y$ au plus en $m$ points.

2° *Le nombre des branches réelles d'une courbe algébrique asymptotes à une droite est pair.*

Car la transformée C′ n'a pas de point d'arrêt.

3° *Quand une courbe algébrique a p asymptotes parallèles entre elles:* 1° *toute parallèle à ces asymptotes rencontre la courbe en* $m-p$ *points à distance finie ;* 2° *chaçune de ces asymptotes la rencontre au plus en* $m-p-1$ *points à distance finie.*

En effet : 1° toute droite menée par un point multiple A′ d'ordre $p$ de la courbe C′ la rencontre en $m-p$ points autres que A′ ; 2° la tangente à l'un des arcs passant par le point A′ rencontre la courbe C′ au plus en $m-p-1$ points autres que A′.

4° *Une asymptote d'une courbe est en général la limite d'une tangente dont le point de contact s'éloigne à l'infini.*

Car la tangente au point A′ où la courbe C′ rencontre l'axe des $y$ est la limite de la tangente en un autre point M′ quand le point M′ vient coïncider avec A′.

La même méthode de transformation a une signification géométrique très simple; elle revient à faire la *perspective* de la courbe C sur un plan.

Considérons deux plans, l'un vertical qui sera celui de la courbe C, l'autre horizontal : prenons dans l'angle dièdre antérieur supérieur un point O situé à une distance égale à l'*unité* des deux plans de projection ; la courbe C′ sera la *perspective* de la courbe C sur le plan horizontal, le point de vue étant en O.

Rapportons la courbe C aux deux axes rectangulaires $ox$, $oy$, dont l'un $oy$ est parallèle à la ligne de terre $lt$ et la perspective de C aux deux axes rectangulaires $o'x'$, $o'y'$, dont l'un $o'y'$ est aussi

parallèle à la ligne de terre. Soient $x, y$ les coordonnées d'un point $m$ de la courbe C, et $x'$, $y'$ celles du point $m'$ perspective de $m$; en appelant $\alpha$ l'angle $moy$ on aura

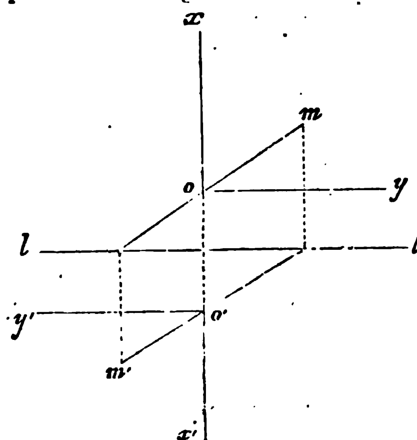


Fig. 147.

$$x = y \operatorname{tg} \alpha \quad \text{et} \quad 1 = y' \operatorname{tg} \alpha,$$

relations d'où l'on déduit $y' = \frac{y}{x}$. On trouvera de même $y = \frac{y'}{x'}$; donc $x'$ et $y'$ sont liés à $x$ et à $y$ par les relations

$$x' = \frac{1}{x} \qquad y' = \frac{y}{x};$$

ces formules sont précisément celles qui définissent notre méthode de transformation.

**Remarque.** — Pour appliquer la même méthode à l'étude des branches infinies asymptotes à des droites parallèles à l'axe des $y$, on emploiera les formules suivantes :

$$y' = \frac{1}{y} \qquad x' = \frac{x}{y};$$

quand $y$ devient infini, $y'$ et $x'$ tendent vers zéro; on sera donc ramené à l'étude d'une courbe dans le voisinage de l'origine.

**Exemple.** — Soit la courbe C qui a pour équation

$$x(x+y)^2 + 4y(x+y) + 4x = 0;$$

si l'on pose d'abord $x = \frac{1}{x'}$, $y = \frac{y'}{x'}$, cette équation devient

$$(y'+1)^2 + 4x'y'(y'+1) + 4x'^2 = 0.$$

La transformée de la courbe C rencontre l'axe des $y$ en un

point dont l'ordonnée est $-1$, et qui correspond à un rebroussement du premier genre, le coefficient angulaire de la tangente étant 2; de plus, dans le voisinage du point de rebroussement, l'abscisse $x'$ est négative.

Il résulte de là que la courbe C a, du côté des abscisses négatives, un point de rebroussement du premier genre à l'infini, et que l'équation de l'asymptote correspondante est $y = -x + 2$.

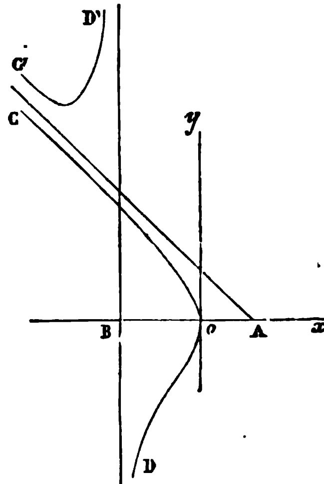


Fig. 148.

Posons maintenant

$$y = \frac{1}{y'} \quad x = \frac{x'}{y'},$$

la nouvelle transformée C″ de la courbe C aura pour équation

$$x'(x'^2 + 4y'^2) + 2x'(x' + 2y') + x' + 4y' = 0;$$

l'origine est un point simple ordinaire de la courbe C″, qui est convexe en ce point vers les ordonnées positives, le coefficient angulaire de la tangente étant $-\frac{1}{4}$. L'arc de la courbe C″ qui passe par l'origine est représentée par l'équation

$$x' = -4y' + Vy',$$

la fonction V tendant vers zéro avec $x'$; de plus, cette fonction est négative ou positive suivant que la valeur infiniment petite attribuée à $y'$ est positive ou négative. La branche correspondante de la courbe C aura donc une équation de la forme

$$x = -4 + V,$$

la fonction V tendant vers zéro quand $y$ devient infini : il résulte de là que la courbe C a deux branches asymptotes à la droite B qui a pour équation $x = -4$; ces branches D et D′ sont situées de part et d'autre de la droite B et s'étendent à l'infini l'une dans le sens des ordonnées positives, l'autre dans le sens des ordonnées négatives.

# CHAPITRE VI

## CONSTRUCTION DES COURBES EN COORDONNÉES RECTILIGNES.

**174.** — Dans la construction des courbes rapportées à des coordonnées rectilignes, nous ferons usage de quelques théorèmes que nous allons d'abord établir.

**Théorème I.** — *Pour que l'origine des coordonnées soit centre d'une courbe ayant pour équation*

$$f(x,y)=0,$$

*il faut et il suffit que les équations*

$$(1) \qquad f(x,y)=0 \qquad f(-x,-y)=0$$

*admettent les mêmes solutions.*

1° La condition est nécessaire; car, si l'origine est centre, au point $M(x,y)$ de la courbe correspond un second point $M'(-x,-y)$ également sur la courbe; donc les équations (1) sont vérifiées simultanément par les coordonnées de chacun des points de la courbe.

2° La condition est suffisante; car, si elle est remplie, à chaque point $M(x,y)$ de la courbe correspondra un point $M'(-x,-y)$ également sur la courbe; or, les deux points M et M' sont symétriquement placés par rapport à l'origine.

**Théorème II.** — *Les coordonnées étant rectangulaires, pour que l'axe des y soit un axe de symétrie d'une courbe ayant pour équation*

$$f(x,y)=0,$$

*il faut et il suffit que les équations*

$$f(x,y)=0 \qquad f(x,-y)=0$$

*admettent les mêmes solutions.*

La démonstration est analogue à celle du théorème précédent.

**Théorème III.** — *Pour que la première bissectrice soit un axe de symétrie, il faut et il suffit que l'équation de la courbe soit symétrique par rapport à $x$ et à $y$.*

1° La condition est nécessaire ; car, les coordonnées d'un point M étant $x$ et $y$, celle de son symétrique M' par rapport à la bissectrice $o$A de l'angle $yox$ seront $y$ et $x$.

2° Elle est suffisante ; car, si elle est remplie, à chaque point $M(x, y)$ de la courbe correspondra un point $M'(y, x)$ également sur la courbe ; or, les deux points M et M' sont symétriquement placés par rapport à la première bissectrice $o$A.

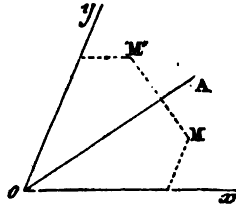


Fig. 149.

**Remarque.** — Pour reconnaître si la seconde bissectrice est un axe de symétrie, on changera $x$ en $-x$ dans l'équation de la courbe, et l'on appliquera le théorème III à l'équation ainsi transformée.

**175.** Nous allons maintenant exposer la marche à suivre pour construire une courbe définie par son équation en coordonnées rectilignes.

**Premier cas.** — *L'équation de la courbe peut être résolue par rapport à l'une des coordonnées.* — Pour fixer les idées, supposons que l'équation de la courbe soit résolue par rapport à $y$.

On commencera par chercher les valeurs de $x$ pour lesquelles $y$ est discontinu et celles pour lesquelles cette ordonnée change de signe en s'annulant ; après avoir rangé toutes ces valeurs par ordre de grandeur croissante, on étudiera les variations de l'ordonnée $y$ dans chacun des intervalles ainsi formés. Le signe de la dérivée de l'ordonnée indiquera si cette fonction est croissante ou décroissante.

Avant de résoudre l'équation de la courbe, on examinera si la courbe est symétrique par rapport à l'origine ou par rapport aux axes de coordonnées, ou encore par rapport aux bissectrices des angles formées par ces axes.

Enfin, pour faciliter le tracé de la courbe, on cherchera ses asymptotes et, pour mieux déterminer sa forme, on étudiera les points singuliers.

Nous ne donnerons pas d'exemples de la construction d'une

courbe définie par une équation résolue ; nous en avons déjà donné plusieurs (94).

**Remarque.** — Quand l'équation de la courbe est du second degré ou bicarrée par rapport à $y$ par exemple, il vaut mieux, au lieu de la résoudre, chercher la condition de réalité des racines et le signe de leur produit ainsi que celui de leur somme.

**Exemple I.** — Reprenons la courbe qui a pour équation

$$(x-1)^2y^4+(x-1)y^3-x^2=0.$$

Nous avons vu (165) que cette courbe a pour asymptotes les droites A, B, B' dont les équations sont respectivement $x=1$, $y=\pm 1$, et déterminé la position des branches infinies par rapport aux asymptotes.

En transportant l'origine au point A(1,0) et ordonnant par rapport à $x$, cette équation devient

$$(2) \qquad x^2(y^4-1)+(y^3-2)x-1=0.$$

La nature des racines de la nouvelle équation, en y regardant $x$ comme l'inconnue, dépend du signe de la quantité

$$\mathrm{U}=y^3(y^3+4y-4),$$

qui s'annule pour $y=0$ et pour une valeur $\beta$ comprise entre $\frac{1}{2}$ et 1 ; donc les racines de l'équation (2) seront imaginaires pour les valeurs de $y$ comprises entre 0 et $\beta$, réelles pour les autres valeurs de l'ordonnée.

La somme et le produit des racines que nous désignerons par $x'$ et $x''$ ont respectivement pour expression

$$\mathrm{S}=-\frac{y^3-2}{y^4-1}, \qquad \mathrm{P}=-\frac{1}{y^4-1}.$$

Pour $y=\beta$, on a $x'=x''=-\dfrac{\beta^3-2}{2(\beta^4-1)}=-\alpha$, et il est facile de vérifier que $\alpha$ est plus grand que l'unité ; on obtient ainsi un point G de la courbe situé dans l'angle $yox'$ entre l'asymptote B et l'axe $ox$. Quand $y$ varie de $\beta$ à $1-\varepsilon$, $x'$ varie de $-\alpha$ à $-\infty$, et $x''$ de $-\alpha$ à $-1$ ; ce qui donne l'arc GE' asymptote à la droite B et l'arc GB'',

la tangente au point B est parallèle à la première bissectrice (*fig.* 140).

Quand $y$ varie de $1+\varepsilon$ à $+\infty$, $x'$ devient positif et varie de $+\infty$ à 0; $x''$ toujours négatif varie de $-1$ à 0; on obtient la branche ED asymptote aux droites B et A et la branche BC' asymptote à la droite A.

Donnons maintenant à $y$ des valeurs négatives. Pour $y=0$, l'équation (2) se réduit à $(x+1)^2=0$; donc, de l'ancienne origine $o$ partent deux branches de courbes tangentes à la droite $oy$. De l'équation (2) on tire $x+1=\pm\sqrt{xy^3(xy+1)}$; donc le point $o$ est un point de rebroussement du premier genre.

Quand $y$ varie de 0 à $-1+\varepsilon$, $x'$ varie de 0 à $-\infty$, et $x''$ de 0 à $-\frac{1}{3}$; on obtient la branche $o$F' asymptote à la droite B' et l'arc $o$B'.

Quand $y$ varie de $-1-\varepsilon$ à $-\infty$, $x'$ devient positif et varie de $+\infty$ à 0; $x''$ toujours négatif varie de $-\frac{1}{3}$ à 0; on obtient la branche FC asymptote aux droites B' et A et la branche B'D' asymptote à la droite A.

**Exemple II.** — *Construire le lieu des points tels que le produit de leurs distances à deux points fixes* F, F' *soit égal à une quantité donnée* $a^2$.

Ce lieu est connu sous le nom d'**Ovale de Cassini.**

Prenons pour axes la droite FF' et une perpendiculaire en son milieu $o$; en appelant $2c$ la distance FF', l'équation du lieu est

$$(3) \qquad y^4+2(x^2+c^2)y^2+(x^2-c^2)^2-a^4=0.$$

Cette équation ne renfermant que des puissances paires des deux coordonnées, l'axe des $x$ et celui des $y$ sont des axes de symétrie. L'équation (3) résolue par rapport à $y^2$ a ses racines réelles, car la quantité placée sous le radical se réduit à $4c^2x^2+a^4$; la somme de ces racines est négative et leur produit a pour expression $P=(x^2-c^2-a^2)(x^2-c^2+a^2)$. Lorsque le produit P est positif, les deux valeurs de $y^2$ sont négatives, et l'équation (3) a ses quatre racines imaginaires; quand ce produit est négatif, l'équation (3) a deux racines réelles.

En résumé, pour que l'équation (3) ait des racines réelles, il faut que l'on ait

$$a^2 + c^2 > x^2 > c^2 - a^2.$$

Prenons sur l'axe des $x$, de part et d'autre de l'origine, des longueurs $oA = oA' = \sqrt{a^2 + c^2}$ ; la courbe sera comprise entre les parallèles ménées par les points A et A' à l'axe des $y$.

Pour interpréter la seconde inégalité, nous distinguerons plusieurs cas.

1° $a < c$. — Prenons sur l'axe des $x$, de part et d'autre de l'origine, des longueurs

$$oA_1 = oA'_1 = \sqrt{c^2 - a^2},$$

la courbe n'aura aucun point situé entre les parallèles menées à l'axe des $y$ par les points $A_1, A'_1$. Quand $x$ varie de

$$\sqrt{c^2 - a^2} \text{ à } \sqrt{a^2 + c^2},$$

$y^2$ est d'abord nul, devient positif et s'annule de nouveau ; on obtient ainsi la courbe fermée $A_1CAC_1$ symétrique par rapport à $ox$. Les valeurs négatives de $x$ donnent une seconde courbe symétrique de la précédente par rapport à $oy$ (*fig.* 150).

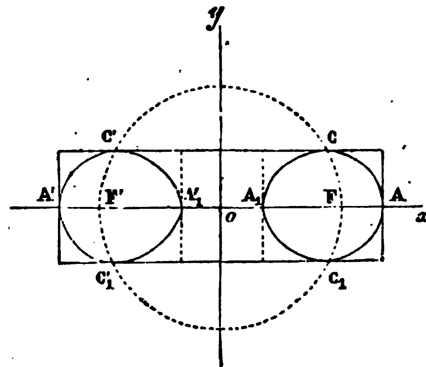



Fig. 150.

Le coefficient angulaire de la tangente a pour expression

$$\mathrm{I} = -\frac{x(x^2 + y^2 - c^2)}{y(x^2 + y^2 + c^2)};$$

il est infini aux points A, A', $A_1$, $A'_1$ et nul aux points C, C', $C_1$, $C'_1$ où la courbe est coupée par la circonférence du cercle décrit du point $o$ comme centre avec $o$F pour rayon.

Ces points d'intersection sont toujours réels, car le carré de leur abscisse

$$x^2 = \frac{4c^4 - a^4}{4c^2}$$

est compris entre $a^2+c^2$ et $c^2-a^2$ ; en ces points, la tangente est parallèle à l'axe des $x$.

2° $a=c$. — On peut faire varier $x$ de $-c\sqrt{2}$ à $c\sqrt{2}$ ; la courbe a, à l'origine, un point double dont les tangentes sont la première et la seconde bissectrice, car l'équation (3) devient

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0.$$

Fig. 151.

On a donné à cette courbe le nom de **Lemniscate** (*fig.* 151).

3° $a>c$. — L'inégalité $x^2>c^2-a^2$ est satisfaite, quel que soit $x$ ; l'abscisse $x$ peut donc varier de

$$-\sqrt{c^2+a^2} \quad \text{à} \quad +\sqrt{c^2+a^2}.$$

Quand $x$ varie de

$$0 \quad \text{à} \quad +\sqrt{c^2+a^2},$$

$y^2$ varie de $a^2-c^2$ à 0 ; le lieu est une courbe fermée qui a pour sommets les points A, A′ et les points B, B′ situés sur l'axe des $y$ à une distance de l'origine égale à $\sqrt{a^2-c^2}$.

Pour que la circonférence du cercle ayant pour centre le point $o$ et pour rayon $o$F rencontre la courbe, il faut que l'on ait $a<c\sqrt{2}$.

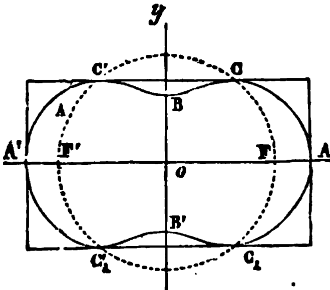



Fig. 152.

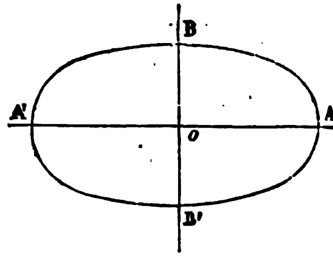



Fig. 153.

Quand cette condition sera remplie, l'ordonnée croîtra du point B au point C, puis décroîtra du point C au point A ; l'ordonnée du point B est minimum et celle du point C maximum (*fig.* 152).

Quand on aura $a > c\sqrt{2}$, l'ordonnée décroîtra du point B au point A, elle sera maximum au point B, et la courbe aura la forme indiquée sur la figure 153.

**Deuxième cas.** — *L'équation de la courbe ne peut pas être résolue par rapport à l'une des coordonnées.* — Lorsqu'il en est ainsi, il est quelquefois possible d'exprimer chacune des coordonnées $x$ et $y$ en fonction d'une variable auxiliaire $t$; on est alors ramené à suivre les variations simultanées de $x$ et de $y$ quand on fait varier $t$.

Supposons que la courbe soit d'ordre $m$ et qu'elle ait un point multiple d'ordre $m-1$ que l'on prendra pour origine ; en posant $y = tx$, on obtiendra une équation qui, divisée par $x^{m-1}$, ne contiendra plus $x$ qu'au premier degré. La courbe sera alors définie par deux équations de la forme

$$y = tx \qquad x = \frac{f(t)}{\varphi(t)}.$$

*Tangente à l'origine.* — Les coefficients angulaires des tangentes aux arcs qui passent par l'origine seront les racines de l'équation $f(t) = 0$.

*Asymptotes.* — Les coefficients angulaires des asymptotes seront les racines de l'équation $\varphi(t) = 0$.

Appelons $c$ une racine de cette équation, nous aurons

$$y - cx = \frac{t-c}{\varphi(t)} \cdot f(t) ;$$

pour avoir l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, il faut chercher la limite de cette expression quand $t$ tend vers $c$. Le coefficient $\frac{t-c}{\varphi(t)}$ prend la forme $\frac{0}{0}$; donc l'ordonnée à l'origine de l'asymptote a pour expression

$$d = \frac{f(c)}{\varphi'(c)}.$$

**Exemple.** — Soit l'équation

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0,$$

qui représente une courbe connue sous le nom de **Folium de Descartes.**

L'origine est un point double, et la courbe est du troisième ordre ; en posant $y=tx$, on exprimera les coordonnées $x$ et $y$ par les formules

$$(4) \qquad x=\frac{3at}{t^3+1}, \quad y=tx=\frac{3at^2}{t^3+1}.$$

Quand $t$ varie de $-\infty$ à $-1-\varepsilon$, $x$ croît de 0 à $+\infty$ et $y$ décroît de 0 à $-\infty$, on obtient l'arc $o$C qui touche à l'origine l'axe des $y$. Quand $t$ varie de $-1+\varepsilon$ à 0, on obtient un nouvel arc illimité $o$C′ qui touche à l'origine l'axe des $x$; les deux arcs $o$C, $o$C′ sont symétriques par rapport à la première bissectrice $o$A. En effet, les coefficients angulaires de deux droites ayant $o$A pour bissectrice de leur angle sont liés par la relation $tt'=1$ ; or, si dans les formules (4) on remplace $t$ par $\frac{1}{t}$, les expressions de $x$ et de $y$ sont permutées.

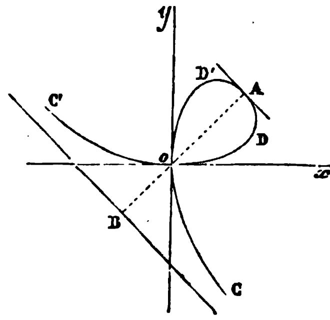


Fig. 151.

La direction asymptotique a pour coefficient angulaire $c=-1$; de plus, on a

$$y+x=\frac{3at(t+1)}{t^3+1}=\frac{3at}{t^2-t+1};$$

en faisant $t=-1$, on trouve, pour l'ordonnée à l'origine de l'asymptote, $d=-a$; cette droite a donc pour équation

$$x+y+a=0.$$

Quand $t$ varie de 0 à 1, $x$ et $y$ varient de 0 à $\frac{3a}{2}$; on obtient l'arc $o$DA qui touche, à l'origine, la droite $ox$ et coupe normalement au point A la droite $o$A; quand $t$ varie de 1 à $+\infty$, on obtient l'arc AD′$o$ symétrique du précédent par rapport à $o$A.

Supposons maintenant que le point multiple d'ordre $m-1$ soit rejeté à l'infini, et désignons par $c$ le coefficient angulaire des $m-1$ asymptotes parallèles entre elles; en posant $y=cx+\delta$, on obtiendra une équation ne contenant plus $x$ qu'au premier degré.

La courbe sera alors définie par deux équations de la forme

$$y = cx + \delta \quad x = \frac{f(\delta)}{\varphi(\delta)}.$$

**Remarque.** — Les ordonnées à l'origine des asymptotes dont le coefficient angulaire est $c$ seront les racines de l'équation

$$\varphi(\delta) = 0.$$

En effet, quand $\delta$ tend vers une de ces racines, $x$ devient infini, et la droite ayant pour équation $y = cx + d$ rencontre la courbe en $m$ points rejetés à l'infini.

**Exemple.** — Construire la courbe qui a pour équation

$$x(x+y)^2 + 3y(x+y) + 2x = 0.$$

Cette courbe est du troisième degré et a deux asymptotes parallèles à la seconde bissectrice; en posant $y = -x + \delta$, les coordonnées $x$ et $y$ seront définies par les formules

$$x = -\frac{3\delta^2}{(\delta-1)(\delta-2)} \quad y = -x + \delta.$$

L'abscisse $x$ devient infinie pour $\delta = 1$ et pour $\delta = 2$; la courbe admet donc pour asymptotes les deux droites parallèles A, B représentées par les équations

$$x + y = 1 \quad x + y = 2.$$

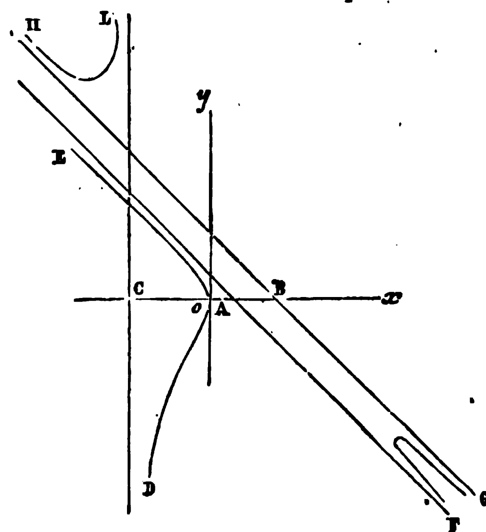


Fig. 153.

Quand $\delta$ varie de $-\infty$ à 0, $x$ est négatif et croît de $-3$ à 0; $y$ est aussi négatif et croît de $-\infty$ à 0; on obtient l'arc D$o$ asymptote à la droite C qui a pour équation $x + 3 = 0$ et touchant à l'origine l'axe des $y$.

Quand $\delta$ varie de 0 à $1 - \varepsilon$, $x$ reste négatif et décroît de 0

à $-\infty$, $y$ devient positif et croît de 0 à $+\infty$ ; on obtient l'arc $o$E asymptote à la droite A.

La variable $\delta$ allant de $1+\varepsilon$ à $2-\varepsilon$, $x$ varie de $+\infty$ à $+\infty$ et $y$ de $-\infty$ à $-\infty$, ce qui donne la branche FG asymptote aux droites A et B.

Enfin $\delta$ allant de $2+\varepsilon$ à $+\infty$, $x$ est négatif et croît de $-\infty$ à $-3$, $y$ est positif et varie de $+\infty$ à $+\infty$ ; on obtient la branche HL asymptote aux droites B et C.

En cherchant l'abscisse du point de la branche GF le plus rapproché de l'axe des $y$, c'est-à-dire du point pour lequel la dérivée de l'ordonnée est infinie, on trouve $x=24$.

**176.** Les deux exemples que nous venons de traiter sont compris dans un cas plus général, celui où la courbe est définie par deux équations de la forme

$$(5) \qquad x=\frac{f(t)}{\varphi(t)} \qquad y=\frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)}.$$

Quand ces expressions de $x$ et de $y$ sont des fractions rationnelles, les courbes représentées par les équations (5) sont dites *unicursales*.

Nous allons exposer brièvement la méthode à suivre pour étudier les courbes définies par les équations (5).

1° *Reconnaître si l'origine est centre.* — L'origine sera centre de la courbe quand, à chaque valeur de $t$, correspondra une valeur $t'$ telle que l'on aura

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)}=-\frac{f(t')}{\varphi(t')} \quad \text{et} \quad \frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)}=-\frac{f_1(t')}{\varphi_1(t')}.$$

2° *Reconnaître si l'axe des abscisses est un axe de symétrie.* — Les coordonnées étant rectangulaires, l'axe des $x$ sera un axe de symétrie quand, à chaque valeur de $t$, correspondra une valeur $t'$ telle que l'on aura

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)}=\frac{f(t')}{\varphi(t')} \quad \text{et} \quad \frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)}=-\frac{f_1(t')}{\varphi_1(t')}.$$

Des considérations analogues sont applicables à l'axe des $y$.

3° *Détermination des asymptotes.* — On obtient les asymptotes parallèles à l'axe des $x$ en prenant les racines de l'équation

$$\varphi(t)=0,$$

qui n'annulent pas $\varphi_1(t)$.

On obtient les asymptotes parallèles à l'axe des $y$ en prenant les racines de l'équation $\varphi_1(t)=0$ qui n'annulent pas $\varphi(t)$.

Occupons-nous maintenant des asymptotes qui ne sont parallèles à aucun des axes de coordonnées.

Pour que des droites de cette nature existent, il faut que $x$ et $y$ deviennnent infinis simultanément ; cela exige que les deux équations

$$\varphi(t)=0 \qquad \varphi_1(t)=0$$

admettent des racines communes réelles.

Soit $t=t_1$ une racine commune réelle de ces équations ; le coefficient angulaire $c$ de l'asymptote correspondante s'obtiendra en remplaçant $t$ par $t_1$ dans la relation

$$\frac{y}{x}=\frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)}\cdot\frac{\varphi(t)}{f(t)}.$$

On déterminera ensuite l'ordonnée à l'origine $d$ de cette asymptote en exprimant en fonction de $t$ la différence $y-cx$ et en cherchant la limite de cette expression pour $t=t_1$.

4° *Détermination des points doubles.* — Pour déterminer les points doubles, on cherchera les valeurs de $t$ et de $t'$ qui satisfont aux deux équations

$$\frac{f(t)}{\varphi(t)}=\frac{f(t')}{\varphi(t')} \qquad \frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)}=\frac{f_1(t')}{\varphi_1(t')};$$

on devra rejeter la solution évidente $t=t'$.

**Exemple.** — *Construire la courbe définie par les deux équations*

(6) $$x=\frac{t}{(t-1)(t+1)} \qquad y=\frac{t-2}{(t-1)(t+2)}.$$

Cette courbe est du troisième ordre; car, si entre les équations (6) et celles d'une droite on élimine $x$ et $y$, on obtient une équation du troisième degré par rapport à $t$.

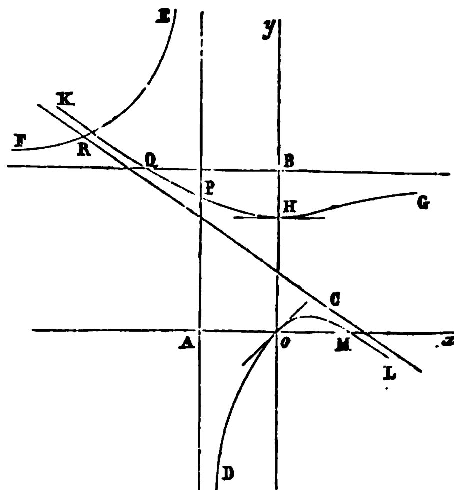


Fig. 156.

L'abscisse $x$ est infinie pour $t = -1$, la valeur correspondante de l'ordonnée étant

$$y = \frac{3}{2};$$

la courbe est donc asymptote à la droite BQ représentée par l'équation $y = \frac{3}{2}$.

L'ordonnée $y$ est infinie pour $t = -2$, la valeur correspondante de l'abscisse étant $x = -\frac{2}{3}$, la courbe est donc asymptote à la droite AP représentée par l'équation $x = -\frac{2}{3}$.

Enfin pour $t = 1$ l'abscisse et l'ordonnée sont infinies; on a

$$\frac{y}{x} = \frac{(t-2)(t+1)}{t(t+2)},$$

et, en faisant $t = 1$ dans cette relation, on trouve $c = -\frac{2}{3}$ pour le coefficient angulaire de l'asymptote non parallèle aux axes de coordonnées.

Pour avoir l'ordonnée à l'origine de cette asymptote, on fera $t = 1$ dans la relation

$$y + \frac{2}{3}x = \frac{5t^2 + t - 6}{3(t-1)(t+1)(t+2)} = \frac{5t+6}{3(t+1)(t+2)};$$

on trouve ainsi $d = \frac{11}{18}$. La courbe est donc asymptote à la droite

C représentée par l'équation

$$y + \frac{2}{3}x = \frac{11}{18}.$$

Remarquons encore que $x$ s'annule pour $t = 0$ et $y$ pour $t = 2$.

Pour suivre plus complètement les variations des coordonnées $x$ et $y$, formons leurs dérivées

$$x'_t = -\frac{t^2+1}{(t-1)^2(t+1)^2} \qquad y'_t = -\frac{t(t-4)}{(t-1)^2(t+2)^2}.$$

On voit que l'abscisse $x$ est constamment décroissante dans chacun des intervalles où elle est continue ; quant à l'ordonnée $y$, dans les intervalles où elle est continue, elle décroît quand $t$ est compris entre $-\infty$ et 0 ; elle croît quand $t$ est compris entre 0 et 4, enfin elle décroît quand $t$ est compris entre 4 et $+\infty$. Cette ordonnée est minimum pour $t = 0$, et maximum pour $t = 4$.

Le sens dans lequel varient $x$ et $y$ étant connu, nous allons, pour plus de clarté, résumer les résultats obtenus dans un tableau donnant les valeurs de $x$ et de $y$ qui correspondent aux valeurs principales de $t$; ces valeurs sont celles pour lesquelles $x$ ou $y$ deviennent nuls, infinis, maximum ou minimum.

| $y'_t$ | $t$ | $x$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| | $-\infty$ | $-\varepsilon$ | $-\varepsilon$ |
| | | | Décroît |
| | $-2-\varepsilon$ | $-\frac{2}{3}$ | $-\infty$ |
| | $-2+\varepsilon$ | | $+\infty$ |
| $-$ | | | Décroît |
| | $-1-\varepsilon$ | $-\infty$ | $\frac{3}{2}$ |
| | $-1+\varepsilon$ | $+\infty$ | |
| 0 | 0 | 0 | 1 (minimum) |
| | | | Croît |
| | $1-\varepsilon$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| | $1+\varepsilon$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+$ | | | Croît |
| | 2 | $\frac{2}{3}$ | 0 |
| | | | Croît |
| 0 | 4 | | $\frac{1}{9}$ (maximum) |
| $-$ | | | Décroît |
| | $+\infty$ | $+\varepsilon$ | $+\varepsilon$ |

$t$ variant de $-\infty$ à $-2-\varepsilon$, on obtient l'arc $o$D asymptote à la droite AP.

$t$ variant de $-2+\varepsilon$ à $-1-\varepsilon$, on obtient l'arc EF asymptote aux droites AP, BQ et coupant l'asymptote C au point R.

$t$ variant de $-1+\varepsilon$ à $1-\varepsilon$, on obtient l'arc GHK asymptote aux droites BQ, C coupant l'axe $oy$ en un point H dont l'ordonnée est minimum et les deux asymptotes A, B en des points P, Q.

$t$ variant de $1+\epsilon$ à $+\infty$, on obtient l'arc LM$o$ asymptote à la droite C, coupant l'axe $ox$ en un point M dont l'abscisse $\frac{2}{3}$ est égale à $o$A et présentant un point dont l'ordonnée est maximum.

Pour $t=\pm\infty$ on trouve $\frac{y}{x}=1$; donc, à l'origine, la courbe touche la première bissectrice.

En calculant les coordonnées des points P, Q, R où la courbe coupe ses asymptotes, on vérifiera que ces points sont en ligne droite: cette propriété appartient à toutes les courbes du troisième ordre ayant trois asymptotes.

Il est visible que la courbe a un point double; nous allons chercher ses coordonnées.

Pour faciliter cette recherche, décomposons $x$ et $y$ en éléments simples, ce qui donne

$$x=\frac{1}{2(t-1)}+\frac{1}{2(t+1)}\qquad y=-\frac{1}{3(t-1)}+\frac{4}{3(t+2)};$$

Attribuons à la variable indépendante deux valeurs $t$ et $t'$, et écrivons que les valeurs correspondantes de $x$ ainsi que celles de $y$ sont égales entre elles, nous obtiendrons deux équations qui, débarrassées de la solution $t=t'$, se réduisent à

$$\frac{1}{tt'-(t+t')+1}+\frac{1}{tt'+(t+t')+1}=0$$
$$\frac{4}{tt'+2(t+t')+4}-\frac{1}{tt'-(t+t')+1}=0.$$

De ces équations on tire $tt'+1=0$, $t+t'=-\frac{1}{2}$; donc les inconnues $t$ et $t'$ sont les racines de l'équation du second degré

$$t^2+\frac{1}{2}t-1=0.$$

En remplaçant, dans les dénominateurs des formules (6), la quantité $t^2$ par sa valeur tirée de l'équation précédente, on obtient

$$x=-\frac{2t}{t}=-2\quad\text{et}\quad y=\frac{2(t-2)}{t-2}=2;$$

le point double a donc pour coordonnées $-2$ et $+2$; il se trouve sur la seconde bissectrice.

## EXERCICES.

1. A une courbe algébrique d'ordre $m$ on peut mener $m(m-1)$ tangentes parallèles entre elles ; le centre des moyennes distances des points de contact est le même, quelle que soit la direction des tangentes (Chasles).

2. Si par les différents points d'une droite D on mène des tangentes à une courbe d'ordre $m$, le lieu géométrique du centre des moyennes distances C des points de contact passe par le centre des moyennes distances des points de contact des tangentes parallèles à la droite D.

Quand la courbe est du second ordre le lieu des points C est une conique semblable à la proposée et passant par son centre (Chasles).

3. Si par les points d'une courbe plane on abaisse des perpendiculaires sur l'une des tangentes, et que, par le pied de chacune d'elles, on mène une droite proportionnelle à la longueur de la perpendiculaire correspondante et parallèle à une direction fixe, le lieu des extrémités de ces droites est une courbe qui a même tangente que la proposée au point qui leur est commun.

4. Le lieu des points M, tels que la somme de deux normales MA, MA' menées par le point à une même courbe ou à deux courbes données soit constante, a pour tangente la bissectrice de l'un des angles formés par les deux normales. — Cas où les courbes données sont deux circonférences de cercle.

5. Étant données deux courbes planes C et C', on regarde comme correspondants les points de ces courbes pour lesquels les tangentes sont parallèles. Cela posé, on mène par un point fixe des droites égales et parallèles à celles qui réunissent deux points correspondants ; démontrer que chaque tangente au lieu ainsi obtenu est parallèle aux tangentes aux deux courbes C et C' aux points correspondants.

6. Par un point P pris dans le plan d'une courbe d'ordre $m$, on mène des normales dont les points d'incidence sont $A_1, A_2, \ldots, A_p$ ; si la somme des carrés de ces normales est égale à une quantité constante $a^2$, le lieu des points P est une courbe C dont la normale au point P passe par le centre des moyennes distances des points $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

Le point P restant fixe, la courbe $C_1$, lieu des points Q tels que l'on a

$$\overline{QA_1}^2 + \overline{QA_2}^2 + \ldots + \overline{QA_p}^2 = a^2,$$

touche la courbe C au point P.

La même proposition est vraie quelle que soit la relation qui lie les longueurs des normales menées par le point P.

7. Une courbe du troisième ordre ayant trois asymptotes rencontre ces droites en trois points situés sur une droite D.

Le produit des distances d'un point quelconque de la courbe aux trois asymptotes est dans un rapport constant avec sa distance à la droite D.

8. Par un point pris sur une cissoïde, on mène une corde et les tangentes aux points où la courbe coupe la corde ; trouver le lieu des points de rencontre de ces tangentes.

9. Par un point pris sur une courbe du troisième ordre et de la troisième

classe on mène une corde et les tangentes aux points où la courbe coupe la corde, trouver le lieu des points de rencontre de ces tangentes.

**10.** Si par les trois points où une droite rencontre une courbe du troisième ordre, on mène les tangentes, ces tangentes coupent de nouveau la courbe en trois points situés en ligne droite.

**11.** Les points de contact des six tangentes menées par un point donné à une courbe du troisième ordre sont sur une conique : les six points où ces tangentes coupent de nouveau la courbe sont aussi sur une conique doublement tangente à la première.

**12.** Trouver le lieu des points de rebroussement des courbes du troisième ordre ayant pour asymptotes trois droites données.

**13.** La droite qui joint deux points d'inflexion d'une courbe du troisième ordre passe par un troisième point d'inflexion.

**14.** Si par un point $a$ d'une courbe du troisième degré, on mène des sécantes coupant de nouveau la courbe aux points $b$, $b'$, le lieu des points $a'$ conjugués harmoniques du point $a$ par rapport aux points $b$ et $b'$ sera une ligne droite toutes les fois que $a$ sera un point d'inflexion.

Réciproquement, pour que le lieu des points $a'$ soit une ligne droite, il faut que le point $a$ soit un point d'inflexion.

**15.** Si autour d'un point d'inflexion d'une courbe du troisième ordre, on fait tourner une transversale, et qu'aux deux points où elle coupe la courbe on mène des tangentes, leur point de concours engendrera une ligne droite D.

Les droites qui joignent deux à deux les points où deux transversales rencontrent la courbe se couperont sur la droite D.

La droite D rencontre chaque transversale en un point qui sera le conjugué harmonique du point d'inflexion par rapport aux deux points où cette transversale rencontre de nouveau la courbe.

Enfin la droite D passe par les points de contact des trois tangentes qu'on peut mener généralement à la courbe par le point d'inflexion.

**16.** Les diamètres d'une courbe du troisième ordre sont, en général, des courbes du même ordre : pour que ces diamètres admettent une branche rectiligne, il faut et il suffit que la courbe donnée se décompose en une droite et une conique, quand les cordes conjuguées du diamètre ne sont pas parallèles à une asymptote.

Si les cordes sont parallèles à une asymptote, le diamètre correspondant admet encore une branche rectiligne, quand l'asymptote est une asymptote d'inflexion.

**17.** Construire les courbes représentées par les équations suivantes :

| | |
|---|---|
| $(y-2x-1)^2(x-1)-x^3=0$ | $y^2x-x^3+2x^2+x-2=0$ |
| $(y-2x-1)^2(x+1)-x+1=0$ | $2x^3-y^3+(y-x)^2=0$ |
| $y^3-3x^2y+2x^3-a^2y=0$ | $(x+y)(x^2+y^2+ax+ay)-axy=0$ |
| $(y-x-1)^2(x-1)(x-2)-x^4=0$ | $8x^2y^2-(x+y)^3=0$ |
| $x^4-y^4-2ay^3-2bx^2y=0$ | $x^4+y^4+6x^2y^2+2(x^2-y^2)=0$ |
| $x^4+y^4-2ay^3-2bx^2y=0$ | $x^4-y^4-(2x-y)xy=0$ |

$$y^4-96a^2y^2+100a^2x^2-x^4=0 \quad \text{(Courbe du diable).}$$

$$(y^2-x^2)(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)-2(x^2+y^2-2x)^2=0.$$

$$y^2 = x^2 \pm \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{x}} \quad y = \sqrt{x \pm \sqrt{\frac{x^4}{x^2-1}}} \quad y = \sqrt{x \pm \sqrt{\frac{x^5}{x-1}}}\,.$$

18. Construire la podaire d'un point P par rapport à une conique donnée.

19. Construire la courbe lieu des points de contact des tangentes menées d'un point P aux cercles qui passent par deux points donnés.

20. Construire les courbes représentées par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x = \dfrac{t(t+1)}{(t-1)(t-2)} \\ y = \dfrac{t^2}{t^2-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a\,\dfrac{\sin 2\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} \\ \quad = b\,\dfrac{\sin\varphi + \cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} \end{cases}$$

$$x^3y^3 - x^3y^2 + 3x^2y - 2x = 0 \quad \text{(on posera } xy = t\text{)}$$
$$x^5y^3 - xy^2 - x - 2 = 0 \quad \text{(on posera } xy^2 = t\text{)}.$$

21. Étudier dans le voisinage de l'origine les courbes représentées par les équations suivantes :

$$x^8y + a_1x^7 + a_2x^2y^5 + b_1x^9 + b_2x^4y^4 + b_3xy^7 + c_1x^4y^5 + c_2y^9 + dy^{10} = 0$$
$$(y-x)^4 + 2x^3(y-x)^2 + x^3 + x^6(y-x) = 0$$
$$y = \sqrt{1+ax} + \sqrt{1+bx} - \sqrt{1-cx} - \sqrt{1-dx}.$$

22. Construire les courbes représentées par les équations suivantes :

$$x^y = y^x \qquad y = x - \frac{1}{3}\operatorname{tg} x - \frac{2}{3}\sin x$$

$$\sin x = 2\sin y \qquad y = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{13x^3 + 3x}{3x^4 + 14x^2 + 3}$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} \qquad y = \frac{x}{1 + e^{\frac{x-1}{x+1}}}$$

$$y = \frac{\sin(x-\alpha)}{\sin^4 x} \quad \text{l'angle } \alpha \text{ étant compris entre 0 et } \frac{\pi}{2}.$$

(Cette équation se présente dans le calcul de l'orbite d'une planète à l'aide de trois observations.)

$$y = x e^{-\left(x - \frac{1}{x}\right)\frac{\sin\alpha}{2}} \quad \text{l'angle } \alpha \text{ étant compris entre 0 et } \frac{\pi}{2}.$$



